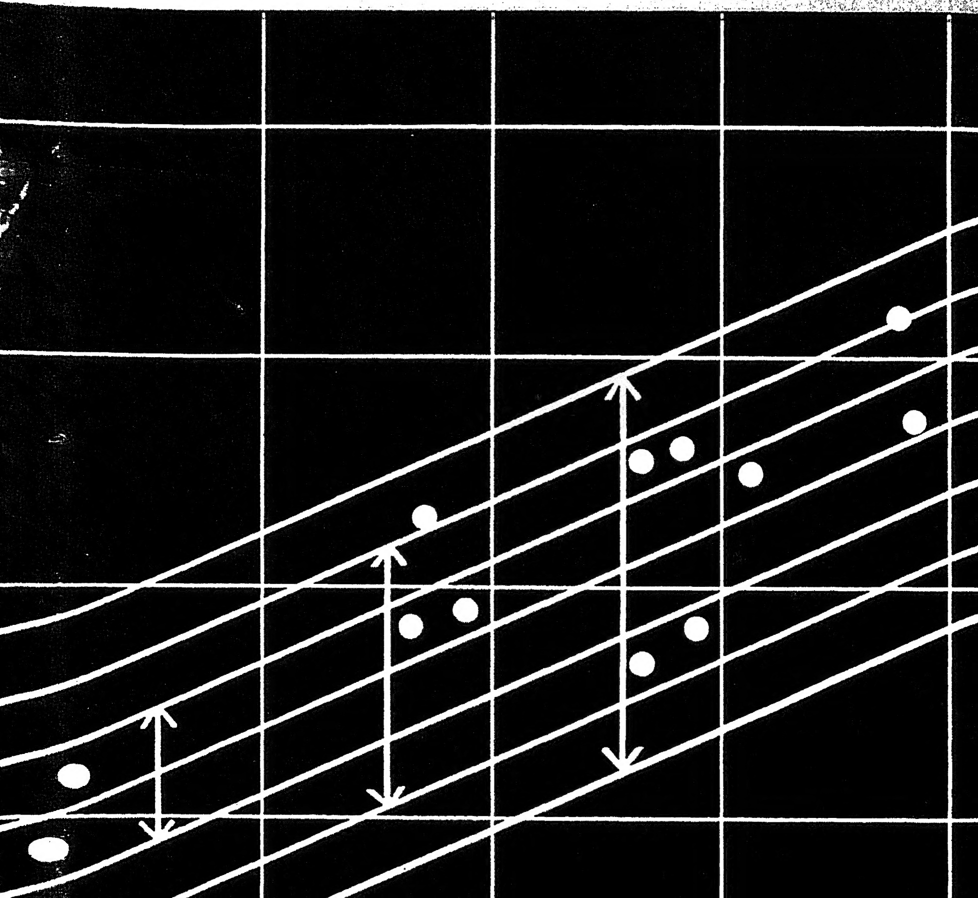
संख्यानक

चं. न. डफाळ



संक्षिप्त संख्यानक



लेखक : श्री. चं. न. डफाळ
बी. ए.; बी. टी.; एम्. कॉम्.;
एफ्. एस्. ए. ए.; एफ् आय्. सी. ए.
एफ्. आर्. जी. एस्. (लंडन)



विज्ञानमाला * पुष्प चौथे
१९६४

पहिली आवृत्ती १९६४



प्रकाशक :

महाराष्ट्र राज्य साहित्य
आणि
संस्कृति-मंडळ, सचिवालय
(विस्तारभवन) मुंबई ३२



मुद्रक :

श्री. दा. त्र्यं. जोशी,
व्यवस्थापक चित्रशाळा प्रेस,
५६२ सदाशिव पेठ, पुणें २

वेष्टन छपाई :

सरकारी मुद्रणालय,
चर्नी रोड, मुंबई ४.



आकृत्या, रेखाचित्रे व ब्लॉक्स :
फोटो झिंको प्रेस, पुणे.

निवेदन

मराठी भाषेला विद्यापीठाच्या भाषेचा दर्जा येण्याकरितां मराठींत विज्ञान, तत्त्वज्ञान, सामाजिक शास्त्रें आणि तंत्रविज्ञान या विषयांवरील ग्रंथांची रचना मोठ्या प्रमाणांत होण्याची आवश्यकता आहे. वरील विषयांवर केवळ परिभाषाकोश अथवा पाठ्य पुस्तकें प्रकाशित करून अशा प्रकारचा दर्जा मराठी भाषेला प्राप्त होणार नाहीं. सर्वसामान्य सुशिक्षितांपासून तों प्रज्ञावंत पंडितांपर्यंत मान्य होतील अशा ग्रंथांची रचना व्हावयास पाहिजे. मराठी भाषेंत किंवा अन्य भारतीय भाषांमध्यें विज्ञान, सामाजिक शास्त्रें व तंत्रविज्ञान या विषयांचें प्रतिपादन करावयास उपयुक्त अशा परिभाषा–सूची किंवा परिभाषा–कोष तयार होत आहेत. परिभाषा किंवा शब्द यांचा प्रतिपादनाच्या ओघांत समर्पकपणें वारंवार प्रतिष्ठित लेखांत व ग्रंथांत उपयोग केल्यानेंच अर्थ व्यक्त करण्याची त्यांत शक्ति येते. अशा तऱ्हेनें उपयोगांत न आलेले शब्द केवळ कोशांत पडून राहिल्यानें अर्थशून्य राहतात. म्हणून, मराठीला आधुनिक ज्ञानविज्ञानांची भाषा बनविण्याकरितां शासनविद्यापीठें, प्रकाशनसंस्था व त्या त्या विषयांचे कुशल लेखक यांनीं ग्रंथरचना करणें आवश्यक आहे.

वरील उद्देश ध्यानांत ठेवून महाराष्ट्र राज्य–साहित्य आणि संस्कृति-मंडळानें कार्यक्रम आंखला आहे. ह्या कार्यक्रमांतील पहिली पायरी म्हणून सामान्य सुशिक्षित वाचक–वर्गाकरितां सुबोध भाषेंत लिहिलेलीं पुस्तकें प्रकाशित करून स्वल्प किंमतींत देण्याची व्यवस्था केली आहे. या विज्ञान–मालेंतील "**संक्षिप्त संख्यानक**" हें चौथें पुस्तक श्री. चं. न. डफाळ, यांनीं लिहिलें आहे.

लक्ष्मणशास्त्री जोशी
अध्यक्ष,
महाराष्ट्र राज्य साहित्य आणि संस्कृति–मंडळ.

प्रास्ताविक

भारताचा विकास नियोजनांत आहे. नियोजन संख्या–शास्त्राधारें होतें. वर्तमानयुगांत संख्याशास्त्राची महती वर्णन करण्याचें प्रयोजन नाहीं. मानव-जीवनांतील एकहि प्रांगण संख्येपासून विमुक्त नाहीं. केवळ शास्त्रांतच नव्हे तर कलेंतहि संख्येची महती प्रस्थापित आहे. अशा ह्या अथांग संख्यासागराच्या पुलिनावर उभें राहून एक दृष्टिक्षेप टाकल्यास नजरेंत सामावणारें क्षितिज म्हणजेच "संक्षिप्त संख्यानक" होय.

पाश्चिमात्य देशांतून निरनिराळीं शास्त्रें व कला यांवर अशीं अनेक संक्षिप्त संस्करणें प्रचारांत आहेत. अशा संक्षिप्त पण संकलित संस्करणांमुळें पाठ्यपुस्तक म्हणून नेमलेल्या जाडजूड ग्रंथांतील अतिविस्तृत व सविस्तर अशा रुक्ष विषय-वस्तूंचेंहि अध्ययन करण्यास विद्यार्थ्यांस विशेषच मदत होते. विश्वकोशांतील लहान निबंध किंवा वर्गांतील विभ्रमणकारी पाठ ह्यांतील मधला मार्ग म्हणून अशा संक्षित पुस्तिका विद्यार्थ्यांची आवश्यक गरज भागवितात. शास्त्रीय तत्त्वांतील अनावश्यक भाग वेगळा करून शिकविलेल्या पाठांच्या रूपरेषा चांगल्याच स्पष्ट होऊन पुढील आयुष्यांत, अनुभवान्तीं, त्या रूपरेषांतील उणीव भरून काढण्याचें कार्य अशा संक्षिप्त पुस्तिकाच करूं शकतात.

संख्याशास्त्राच्या अथांग सागरांत अवगाहन करणाऱ्यास "संक्षिप्त संख्या-नका"ची भूमि अतिशय संकुचित भासेल. या शास्त्राच्या अधिक ज्ञानासाठीं जिज्ञासूंस माझ्या 'सांख्यिकीय–विधि' ह्या ग्रंथाकडेच वळावयास हवें. परंतु ह्याच कारणास्तव मला असें म्हणावेंसें वाटतें कीं, विद्यार्थी व सर्वसाधारण वाचक यांना संख्याशास्त्राच्या अभ्यासासाठीं, तसेंच ह्या क्षेत्रांत काम करणारे संशोधक यांस जवळ बाळगण्यासारखा संदर्भग्रंथ म्हणून संख्याशास्त्राचें हें असलें संक्षिप्त रूपच उपयोगी होय. ह्यांत दिलेलीं सूत्रें व उदाहरणें संख्येच्या कोणत्याहि क्षेत्रांतून काम करणाऱ्यांची अधिकांश गरज पूर्ण करतील.

गणितीय प्रतिपादन, तसेंच रुक्ष आणि अनावश्यक चर्चा वगळून, आव-श्यक आणि उपयुक्त तेवढींच खास सूत्रें आणि तत्संबंधींचीं उदाहरणें प्रस्तुत ग्रंथांत दिलीं आहेत. त्यामुळें त्यांची उपयुक्तता वाढण्यांत मदतच झाली आहे. संख्या-शास्त्राचे विद्यार्थी आणि या शास्त्राच्या अनेक उपांगांतून काम करणारे इतर यांचीं

आवश्यक तीं सूत्रें व इतर सामग्री अनेक ग्रंथांतून शोधण्याची यातायात नको, ह्या उद्देशानें सर्व गोष्टी संकलित करून या ग्रंथांत दिल्या असल्यानें कोणत्याहि संख्यानीय कर्मचाऱ्यास गणनयन्त्राप्रमाणेंच "संक्षिप्त संख्यानका"चीहि आवश्यकता आहे.

राष्ट्राच्या अभ्युदयाची किल्ली राष्ट्रीय शिक्षणांत असते. राष्ट्रीय शिक्षणाचें माध्यम म्हणून मातृभाषेचा वापर अनिवार्य होय. भारतांत ह्या शिक्षणांतील सर्वांत मोठी उणीव म्हणजे मातृभाषेंतून असणाऱ्या शास्त्रीय विषयांवरील पुस्तकांची, आणि संक्षिप्त संख्यानकें मराठींतून लिहिण्याचा अट्टाहासहि तर त्याचकरितां !

लोकमान्य नगर, पुणें २
ता. ३० सप्टेंबर १९६४.

चं. न. डफाळ

अनुक्रमणिका

प्रकरण १

संख्यानीय श्रेणी

संख्याशास्त्रांतर्गत केलेली परिपृच्छा (चौकशी) प्रयोग अथवा अधिक्षण ह्यामुळे प्राप्त होणारा न्यास, हा नेहमी इयत्तात्मक असतो. तसाच तो विशालरूपही असतो. अशा ह्या इयत्तात्मक न्यासाचे विश्लेषण, वर्गीकरण व मांडणी यासाटी ज्या एका विशिष्ट प्रक्रियेचा उपयोग केला जातो, त्यास संख्यानीय विधी असे म्हणतात.

ह्या संख्यानीय विधीची मूलतत्त्वे खालीलप्रमाणे—

(१) न्यास गोळा करणे व तो एकत्रित मांडणे.

(२) न्यासाचे वर्गीकरण व त्यास संक्षिप्त रूप देणे.

(३) त्या न्यासाचे खालील तीन रूपात दिग्दर्शन करणे.

(अ) वृत्तान्त (Textular) रूपात.

(ब) सारणीच्या रूपात.

(क) चित्राकृतीच्या रूपात.

(४) न्यासाचे विश्लेषण करणे.

ह्या संख्यानीय विधीच्या मर्यादा व लक्षणे पुढीलप्रमाणे समजावीत

(१) विपुल असा हा इयत्तात्मक न्यास फक्त संख्यानीय विधीद्वाराच हाताळला जाऊ शकतो.

(२) इयत्तात्मक रूपात रूपांतरित होऊ शकणाऱ्या समंकावरच फक्त ह्या संख्यानीय विधिद्वारा प्रक्रिया होऊ शकतात.

(३) संख्यानीय प्रक्रिया निरपेक्ष (Objective) असतात. त्यांपासून प्राप्त होणारे परिणाम मात्र त्यातील निर्वचनाप्रमाणे प्रातीतिक (Subjective) समजावे.

(४) संख्यानीय विधी तथा प्रक्रिया; आर्थिक, शैक्षणिक, समाजशास्त्र तथा मानसशास्त्र, वगैरे सर्व क्षेत्रांतून सारख्याच लागू आहेत.

संख्यानीय श्रेणी

इयत्तात्मक न्यासाचे विश्लेषण करण्यापूर्वी त्या सर्व न्यासाची प्रथम नीट पद्धतशीरपणे मांडणी करावयास हवी. ही रचना निरनिराळ्या तऱ्हेने करिता येते. अशा तऱ्हेने केलेल्या ह्या रचनेस 'बंटन' अथवा 'श्रेणी' असे म्हणतात. न्यासाचे रचनेप्रमाणे प्राप्त होणारी बंटने अथवा श्रेणी खालीलप्रमाणे होत:—

(य) समंकाच्या महत्तेप्रमाणे न्यासाची रचना केल्यास जी श्रेणी प्राप्त होते त्या श्रेणीस 'वारंवारता बंटन श्रेणी' असे म्हणतात.

(र) समंकांची रचना कालक्रमानुसार केल्यास प्राप्त होणाऱ्या श्रेणीस कालिक-श्रेणी असे म्हणतात.

(ल) भौगोलिक स्थापनपरत्वे समंकांची रचना केल्यास प्राप्त होणाऱ्या श्रेणीस स्थलीय (Spatial) बंटन असे म्हणतात.

ह्याशिवाय समंकाची मात्रा अथवा त्याचे प्रकार ह्या अनुरोधाने समंकांची मांडणी केल्यास विशिष्ट अशी खास निरनिराळ्या प्रकारची बंटने प्राप्त होतात.

वारंवारता बंटन

प्राप्त इयत्तात्मक न्यासाची त्यातील समंकाच्या महत्तेप्रमाणे अथवा आकार-मानाप्रमाणे रचना केल्यास येणाऱ्या श्रेणीस 'वारंवारता बंटन श्रेणी' असे म्हणतात. ही श्रेणी खाली दिलेल्या नियमांनुसार तयार करितां येते:—

(१) इयत्तात्मक न्यासातील विस्तार किती हे प्रथम शोधून काढावे. न्यासातील उच्च व कनिष्ठ अंकातील फरकास अथवा तफावतीस विस्तार असे म्हणतात.

(२) ह्या विस्तारात किती संभाग बसतील हे ठरवावे व मग त्या अनुषंगाने संभागान्तराल निश्चित करावा.

हा संभागान्तराल खालील सूत्रद्वारा साधारणतया निश्चित होऊ शकतो.

$$\text{श} = \frac{\text{विस्तार}}{१ + ३\cdot३२२ \text{ छे. डा.}}$$

ज्यात; श = संभागान्तराल.

डा = एकूण पदसंख्या.

(३) हे संभाग मग चढत्या क्रमाने एकानंतर एक असे सारणीतील पहिल्या स्तंभात लिहावे.

(४) प्राप्त इयत्तात्मक न्यासातील समंक ह्यापैकी कोणत्या संभागात पडतील हे ठरवावे. त्याकरिता न्यासातील प्रत्येक समंकाकरिता संभागासमोर एक रेघ ओढावी. (पहा सारणी १)

भृती परिपृच्छेद्वारा प्राप्त खालील अपक्व न्यास पहा :

साप्ताहिक भृती	कामगार संख्या	साप्ताहिक भृती	कामगार संख्या
१ शिलिंग–पेन्स	२	१ शिलिंग–पेन्स	२
१४–	१	२८	१
१५–	१	२९	१
१८–	४	३०	१०
१९–	२	३१	१
२०–	७	३२	१
२०·६	१	३२·६	१
२१–	४	३५	१
२२–	४	३६	१
२३–	२	३८	१
२४–	८	४०	३
२५–	७	४५	६
२५·६	१	५०	१
२७–	१	५५	१
		एकूण	७२

सदर परिपृच्छेतील इयत्तात्मक तत्त्वे दोन :

(१) मापांकित लक्षण : साप्ताहिक भृती.

(२) वारंवारता : कामगारसंख्या.

वरील इयत्तात्मक न्यासाचे नीट आकलन होण्याकरिता संक्षिप्त रूपात ह्यांची रचना करावयास हवी.

सदर न्यासाचा विस्तार ५५−१४=४१ शिलिंग एवढा आहे. ५−शिलिंगाचा संभागान्तराल ठेवल्यास एकूण ८ अथवा ९ संभाग पडतील. हा संभागान्तराल धरून संभाग पाडल्यास दिलेल्या इयत्तात्मक न्यासाची ताळेबंदासहित वारंवारता बंटन श्रेणी खालीलप्रमाणे तयार होतेः—

सारणी−१

कामगारांस मिळणाऱ्या भृतीप्रमाणे प्राप्त वारंवारता बंटन.

साप्ताहिक भृती (१) संभागान्तराल	ताळा	कामगार−संख्या (२) वारंवारता
शिलिंग−पेन्स		
१२·५—१७·५	//	२
१७·५—२२·५	卌 卌 卌 卌 //	२२
२२·५—२७·५	卌 卌 卌 ////	१९
२७·५—३२·५	卌 卌 ////	१४
३२·५—३७·५	///	३
३७·५—४२·५	////	४
४२·५—४७·५	卌 /	६
४७·५—५२·५	/	१
५२·५—५७·५	/	१
		एकूण ७२

म = २७·८५ शि. मा. = २५·६६ शि. भू = २१·८५ शि.

$तु_1$ = २१·१४ शि. $तु_3$ = ३१·४३ शि. $घा_2$ = २५·० शि.

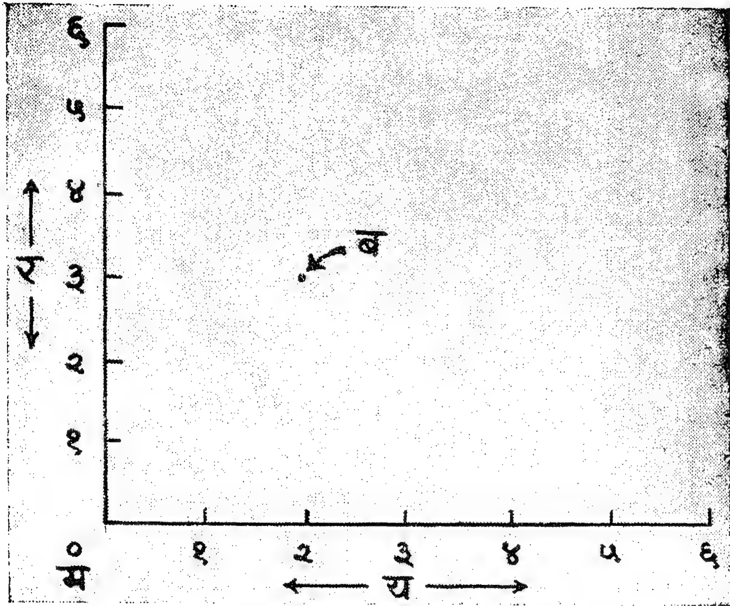
रि = ७·०१२५ शि. घि = ८·८५ शि. तु. वि. = ५·१४५ शि.

फा. = ३१·७५ शि.

वारंवारता बंटनाचे चित्रांकण

ठराविक प्रमाणात विभाजित केलेल्या दोन रेषा 'म' ह्या बिन्दूवर काटकोनात उभ्या केल्या तर दिलेला न्यास त्यांच्या अनुषंगाने आपणास चित्रित करता येतो. अनुप्रस्थ रेषेस 'य–अक्ष' असे म्हणतात. उदग्र रेषेस 'र–अक्ष' असे म्हणतात.

कोणत्याहि बिन्दूच्या अर्हा दिल्यास तो बिन्दू अशा तऱ्हेने तयार केलेल्या ग्राफमध्यें दाखविता येतो. (आकृति १) य = २ व र = ३ असे अक्ष असणाऱ्या एका बिन्दूचे चित्रांकण आकृति १ मध्ये 'ब' ने दाखविले आहे.



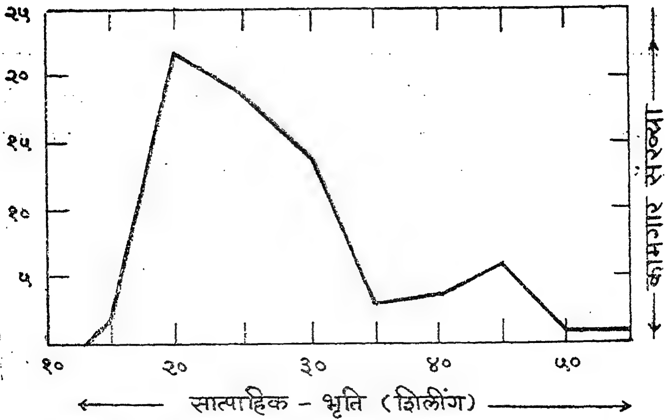
आकृति १ :— य = २, र = ३ बिन्दूचे चित्रांकण

दिलेल्या न्यासाच्या एककात हे दोन्ही अक्ष दिल्यास वरील वारंवारता बंटन चित्ररूपानेही दर्शविता येईल. त्याकरिता—

(१) स्वतंत्र चल हा अनुप्रस्थ य – अक्षावर दाखवावा. परतन्त्र चल हा उदग्र र – अक्षावर दाखवावा. वारंवारता श्रेणीतील संभागान्तरालास स्वतंत्र-चल समजावे व वारंवारतेस परतंत्र–चल समजावे.

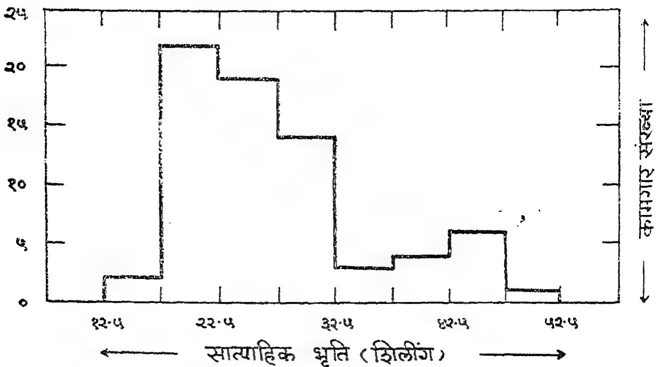
(२) वारंवारता ही त्या संभागान्तरालातील मध्य बिन्दूने र–अक्षावर सुयोग्य अशा अन्तराने दर्शित होते.

(३) अशा तऱ्हेने प्रांकणानंतर प्राप्त झालेले बिन्दू सांधल्यास **वारंवारता बहुभुज चित्र** तयार होते. (आ.२)



आकृती २ :–एका फॅक्टरीतील कामगारांच्या साप्ताहिक भृतीचे वारंवारता बहुभुज चित्र.

(४) संभागान्तराल ही रुंदी व त्या संभागान्तरालातील वारंवारता ही उंची धरल्यास मिळणाऱ्या आयताच्या आकृतीमुळे 'आयताकार वारंवारता बहुभुज चित्र' तयार होते. ह्यासच **आयतचित्र** असे म्हणतात. (आ. ३)



आकृती ३:—एका फॅक्टरीतील कामगारांच्या साप्ताहिक भृतीचे आयत चित्र.

संचयी वारंवारता बंटन :

वारंवारतेच्या संचयनामुळे प्राप्त होणाऱ्या बंटनास संचयी बंटन असे म्हणतात. आयुर्विमा वगैरे सारख्या ठिकाणी अशा प्रकारच्या संचयी बंटनाची आवश्यकता अतिशय असते. सारणी १ मधील न्यास संचयी रीतीने खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

सारणी २

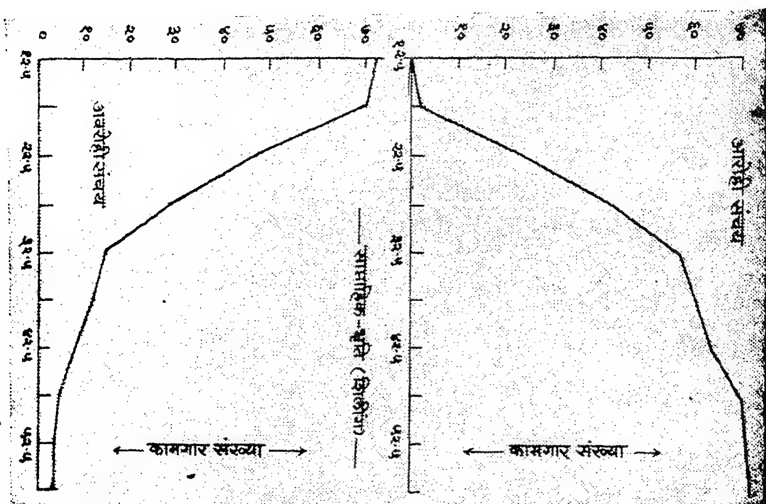
कामगारांच्या साप्ताहिक-भृतीचें संचयी बंटन.

साप्ताहिक भृती (१) संभागान्तराल (शिलिंग)	कामगार-संख्या (२) वारंवारता	संचयी—वारंवारता (३)	
		आरोही	अवरोही
१२·५—१७·५	२	२	७२
१७·५—२२·५	२२	२४	७०
२२·५—२७·५	१९	४३	४८
२७·५—३२·५	१४	५७	२९
३२·५—३७·५	३	६०	१५
३७·५—४२·५	४	६४	१२
४२·५—४७·५	६	७०	८
४७·५—५२·५	१	७१	२
५२·५—५७·५	१	७२	१
	७२		

सारणी २ वरून दिसून येईल की ही संचयी वारंवारता दोन तऱ्हेनें तयार होते. (१) आरोही संचयः ज्यामुळें एका विशिष्ट भृतीखाली किती कामगार होते हे ह्यावरून कळते. उदाहरणार्थ आठवड्याला २२·५ शिलिंगांपेक्षा कमी मजुरी मिळविणारे एकंदर २४ कामगार होते. वगैरे (२) **अवरोही संचयः** ज्यामुळें एका विशिष्ट मजुरीपेक्षा जास्त मजुरी मिळविणारे किती कामगार होते हे अवरोही-संचयनामुळे कळते. उदाहरणार्थ—आठवड्याला २२·५ शिलिंगांपेक्षा अधिक मजुरी मिळविणारे एकूण ४८ कामगार होते. वगैरे—

अशा प्रकारचे संचयी वारंवारता बंटन हे साध्या वारंवारता बंटनापेक्षा अधिक नियमित असते. साध्या वारंवारता बंटनांतील संभागान्तराल सारख्या अन्तराचे असतात. संचयी वारंवारता बंटनातील संभागान्तराल असम अन्तराचे असले तरी त्यामुळे काहीं अडचण उद्भवत नाही.

संचयी वारंवारता बंटनाचे चित्रांकण आकृती ४ व ५ मध्ये दिले आहे.



आकृति ४ व ५ : आरोही-अवरोही संचय

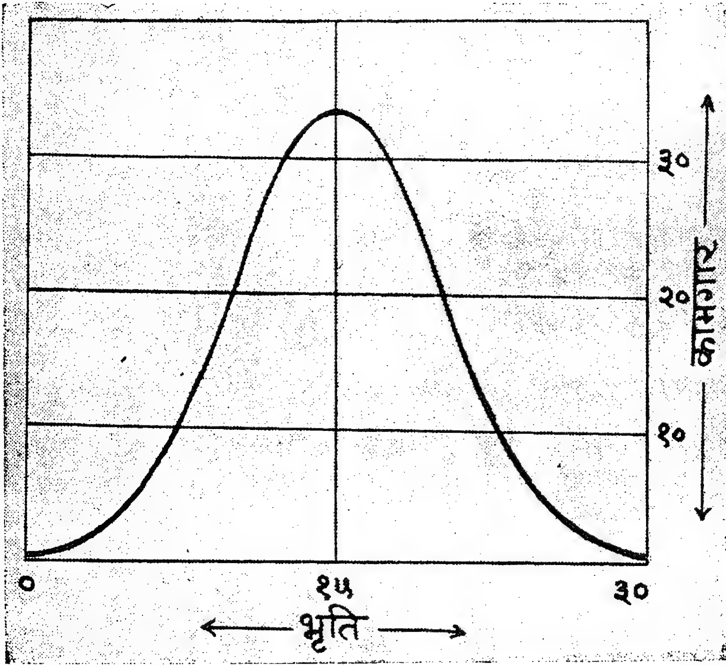
विश्लेषण

अधिक्षणान्ती प्राप्त होणारा न्यास अवाढव्य प्रमाणात असल्याने तो हाताळावयाचा असल्यास त्याचे वर्गीकरण करून त्यास संक्षिप्त रूप द्यावयास हवे. त्यानंतरच अशा न्यासाचे विश्लेषण शक्य आहे. याकरिता वारंवारता बंटनातील न्यासाची अगोदर नीट जुळणी व मांडणी व्हावयास हवी. त्यानंतर त्यावर अनेक प्रक्रिया करून त्याचे विश्लेषण करावे. निव्वळ वर्गीकरण केल्यानेच विश्लेषणाचे काम भागणार नाही.

वारंवारता बंटनाचे प्रकार

साधारणतः नेहमी अवलोकनांत असणारे बंटनाचे प्रकार खाली दिले आहेत परन्तु ह्याशिवाय (अ) बहुगुणी-भूयिष्ठ-वारंवारता वक्र, (ब) अंकुशाकार वक्र, (क) ऊर्ध्व बाहू वक्र वगैरे सारखेही काही विशिष्ट प्रकार आढळात येतात.

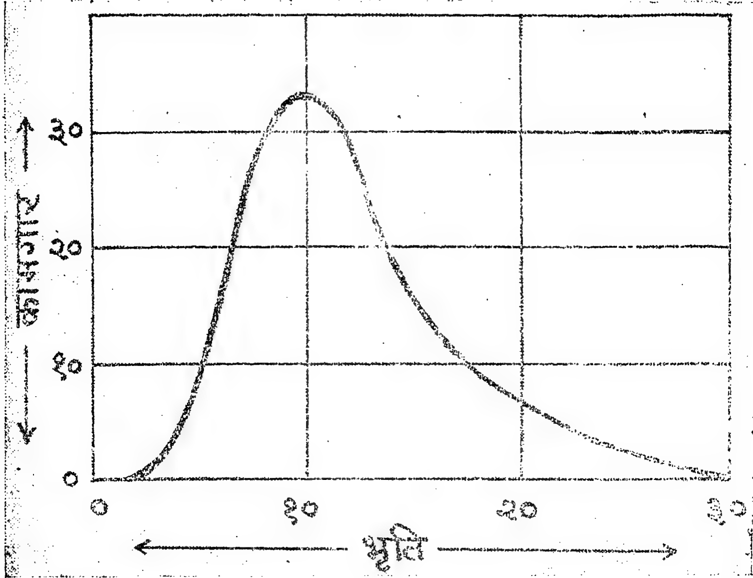
(१) **संमित बंटन :** प्रसामान्य वक्र (अथवा घंटाकार वक्र) हे संमित बंटनाचे सर्वात उत्तम उदाहरण होय. (आ. ६)



आ. ६ — एका फॅक्टरीतील कामगारांच्या भृतीवरून तयार केलेले प्रसामान्य वक्र

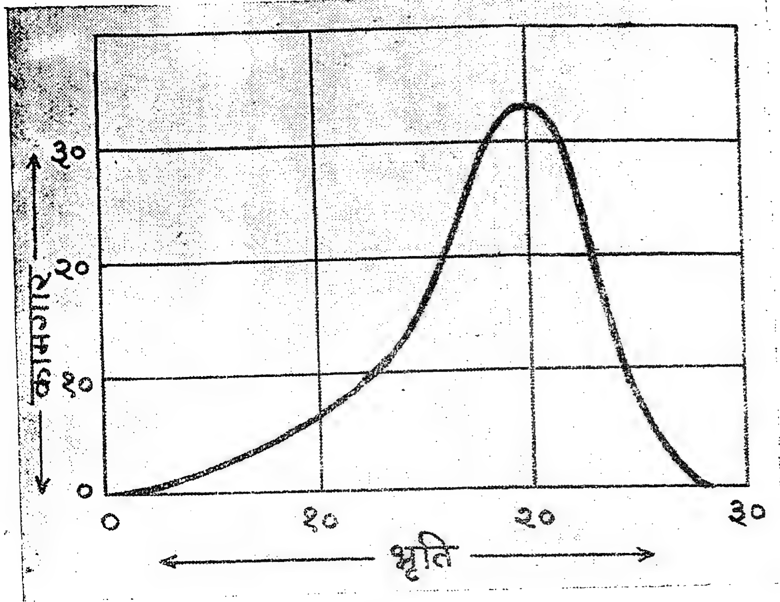
(२) **असंमित बंटने :** बहुतेक वारंवारता बंटने ही कोणत्या तरी एका बाजूस कललेली आढळून येतात. अशा बंटनास असंमित बंटने असे म्हणतात. कारण त्यांच्या दोन्ही बाजू सारख्या, म्हणजे संमित नसतात.

(अ) **दक्षिणायत विषमता बंटन :** अशा बंटनातील अत्युच्च अर्हा बंटनाच्या चरमसीमेत असलेल्या आढळून येतात. त्यामुळे अशा प्रकारची सर्व बंटने बहुधा उजवीकडेच विरूपित झालेली आढळून येतात. (आ. ७)



आ.७–दुसऱ्या एका फॅक्टरीत मिळणाऱ्या भृतीप्रमाणे चित्रांकित दक्षिणायत विषमता बंटन

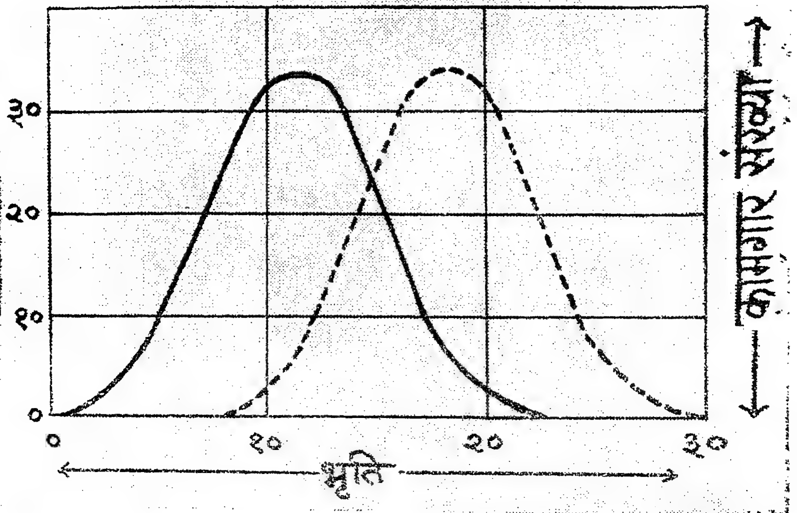
(ब) वामायत विषमता बंटन : अशा बंटनातील चरम सीमेतील अंश लहान असतात. त्यामुळे सदर बंटन डावीकडे विरूपित होते. असले बंटनाचे प्रकार क्वचित दृष्टीस पडतात. (आ. ८)



आ. ८—एका फॅक्टरीतील भृतीवरून चित्रांकित वामायत विषमता बंटन.

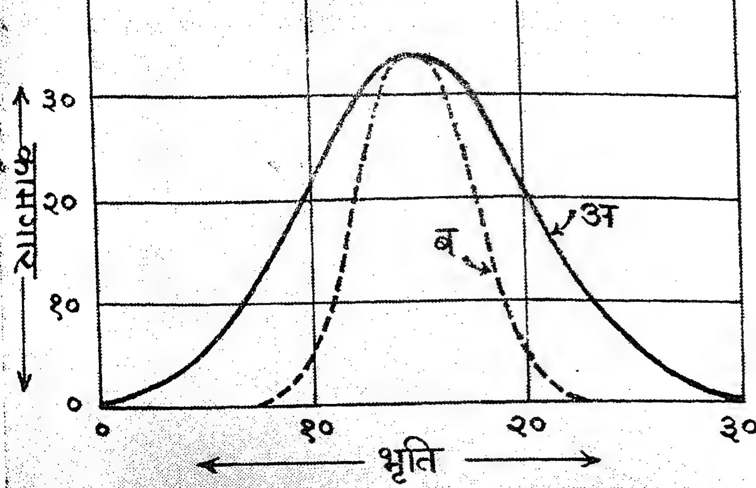
आर्थिक, सामाजिक व प्राकृत क्षेत्रातील न्यासांतून बहुधा एका बिन्दूभोवती गोळा होण्याची वृत्ती आढळून येते. ह्या वृत्तीमुळेच अशा वारंवारता बंटनाचे चित्रांकण केल्यास येणाऱ्या आकृतीत एक शिखर आढळून येते. आकृतीतील अशा तऱ्हेचे शिखर म्हणजे बंटनातील केंद्रीय-वृत्तीचे निदर्शक होय त्या केंद्रीय वृत्तीचें मापनही होऊं शकते. खालील (आ. ९) आकृतीतील दोन्ही बंटने सारखीच आहेत. त्यांतील केंद्रीय-वृत्तिनिदर्शक बिन्दू तेवढे वेगळे आहेत.

संकलित न्यासातील अर्हांची एका विशिष्ट बिन्दूभोवती गोळा होणाऱ्या ह्या वृत्तीमुळेच, त्या सबंध न्यासाचे वर्णन केवळ एका विशिष्ट व्यक्तिगत अर्हेमुळे साध्य होते. ह्या केंद्रीयवृत्ति-निदर्शक बिन्दूचे मापन व स्थान निश्चिती माध्याने होऊ शकते.



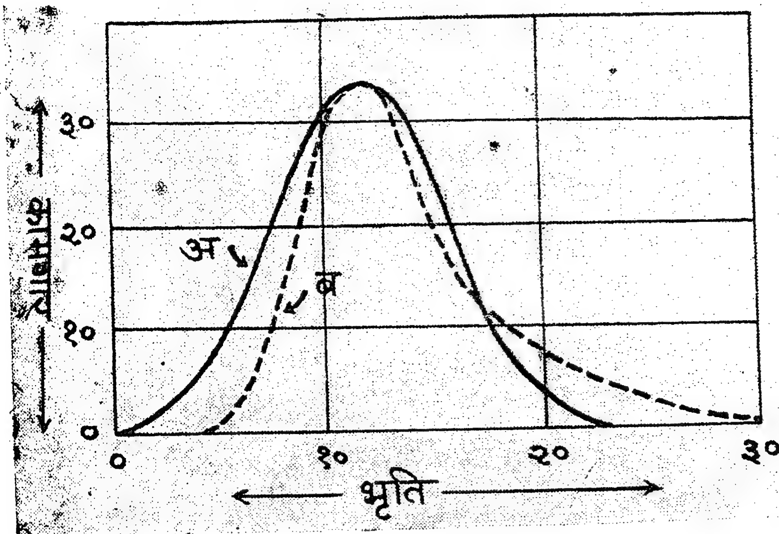
आ. ९ :–दोन फॅक्टरींतील कामगारांच्या भृतीवरून चित्रांकित वारंवारता बंटन वक्र.

अपकिरण : आकृती १० मध्यें दर्शविलेल्या दोन्ही बंटनांची लक्षणे सारखीच्च आहेत. अ-वक्रांत अंतर्भूत असलेल्या पद–अर्हा मात्र ब–वक्रातील पद–अर्हांपेक्षा भिन्न आहेत. त्यातील विचरणेही भिन्न आहेत. वक्रातील विचरणांच्या ह्या मात्रेस अपकिरण असे म्हणतात. श्रेणीतील निरनिराळ्या पदांच्या विचरण मात्रेचाही त्यामुळे बोध होतो.



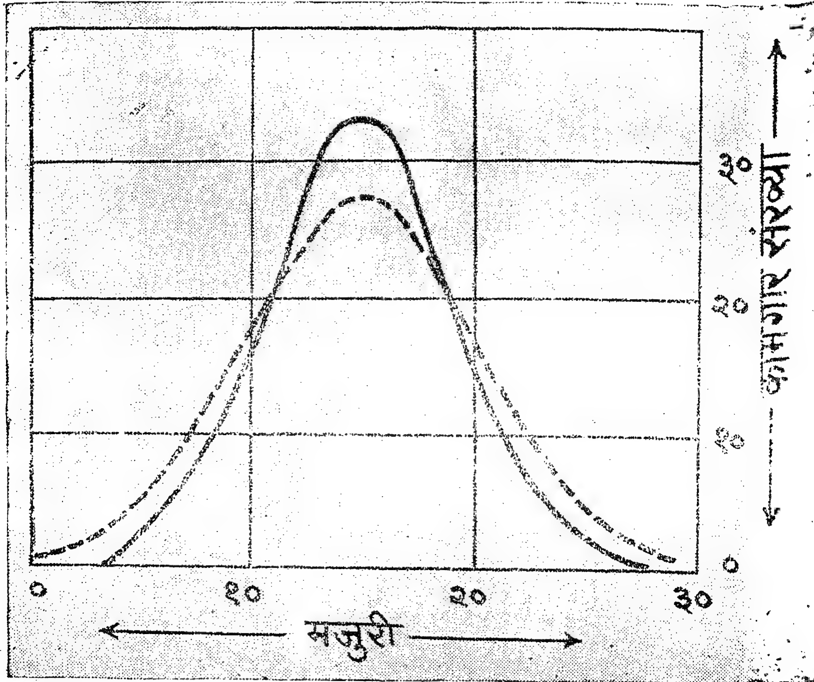
आ. १०:–दोन फॅक्टरीतील कामगारांच्या भृतीवरून चित्रांकित वारंवारता वक्र.

विषमता : आकृती ११ मध्ये दोन वक्र दाखविले आहेत. त्यापैकी 'अ' हे वक्र संमितीय आहे; तर 'ब' हे वक्र असंमितीय आहे. अशा प्रकारच्या असंमितीयतेस विषमता असे म्हणतात.



आ. ११ :–दोन फॅक्टरीतील कामगारांच्या भृतीचे वारंवारता बंटन वक्र.

परन्तु आकृती १२ मधील वक्रांकडे दृष्टिक्षेप केल्यास असे दिसून येईल की एक वक्र दुसऱ्यापेक्षा अधिक उंच आहे. अशा प्रकारच्या शिखर–उंचीस **ककुद् वक्रता** असे म्हणतात.



आ. १२:–दोन फॅक्टरींतील कामगारांच्या भृतीवर आधारित वारंवारता बंटन वक्र.

प्रकरण २

वारंवारता बंटन विश्लेषण

केन्द्रीय-वृत्ती व समान्तर मध्यक

सर्वसाधारण वृत्तीचे मापांक : माध्य

एकत्रित केलेल्या विपुल अशा न्यासाचे वर्णन अथवा त्याचे संक्षिप्त निरूपण माध्य ह्या एकाच विशिष्ट अर्हेने होऊ शकते. न्यासातील चरम व आत्यंतिक अर्हांचे मापनही माध्याद्वारे शक्य आहे. केंद्रीय-वृत्ति-निदर्शनार्थही माध्याचा उपयोग होतो.

माध्याचे प्रकार :

माध्याचे मुख्य प्रकार असे :

(१) समान्तर मध्यक (म.)

(२) मध्यका (मा)

(३) भूयिष्टक (भू.)

(४) गुणोत्तर मध्यक (ग)

(५) हरात्मक मध्यक (ह)

समान्तर मध्यक :

गणनेस सोपे व नेहमीच्या प्रचारातील असे हे माध्य असून अनेक माध्यापैकी तेच एक विशेष उपयोगी असे माध्य आहे.

समान्तर मध्यक गणना : (अवर्गीकृत न्यास)

कोणत्याही इयत्तात्मक न्यासाचा समान्तर मध्यक हा त्या न्यासातील वैयक्तिक पदांच्या एकूण बेरजेस त्या न्यासातील एकूण पदसंख्येने भागल्यास येतो.

समान्तर मध्यक गणनेचे सूत्र असे :

$$म = यो_{ट} / डा \ldots \qquad (१)$$

ज्यात म = समान्तर मध्यक; यो = योग.

ट = न्यासातील वैयक्तिक पदे; डा = एकूण पदसंख्या.

उदाहरणार्थ, २, ५, ६ व ७ चा समान्तर मध्यक—

$यो_{ट} = (२ + ५ + ६ + ७) = २०.$ डा = ४

$\therefore यो_{ट} / डा = \frac{२०}{४} = ५$ (म.)

अमर्यादित पदसंख्या असल्यास त्याने समान्तर मध्यक वरील सूत्र उपयोगात आणून काढणे सहजासहजी शक्य नाही. ते अतिशय जिकिगीचे व त्रासदायक होते. त्यात विभ्रमाचा अंशही अधिक असतो. कधीकधी तर न्यासातील ह्या अमर्याद पदांची बेरीज करणे अशक्यप्राय होते. चाळीस ते पन्नास हजार पदांचा अचूक असा समान्तर मध्यक काढणे, मशीनच्या साहाय्यानेसुद्धा जवळजवळ अशक्यप्रायच होय.

त्याकरिता सरळ पण कार्यक्षम विधी म्हणजे प्राप्त न्यास वर्गणविधीने वारंवारता बंटनात मांडावा व त्यानंतर खाली दिलेल्या कोणत्याही एका पद्धतीने त्याचा समान्तर मध्यक काढावा. उदाहरणार्थ सारणी ३ मधील न्यासाचा समान्तर मध्यक काढताना असे गृहीत धरण्यात येते की कोणत्याही एका संभागान्तरालातील सर्व अर्हा ह्या त्या संभागान्तरालात समप्रमाणात बंटीत असून त्या सर्व अर्हांचा मध्यक त्या संभागान्तरालाच्या मध्य बिन्दूशीं जुळतो.

ह्यावरून जे उपप्रमेय सिद्ध होते ते असे : कोणत्याही संभागान्तरालातील एकूण पदसंख्येचा त्या संभागान्तरालातील मध्य बिन्दूशी गुणाकार केला तर येणारी संख्या ही त्या सर्व पदांच्या एकूण बेरजेइतकी असते.

सारणी–३

समान्तर मध्यक गणना.

एका फॅक्टरीतील कामगारास मिळणाऱ्या साप्ताहिक भृतीवर आधारित न्यास

साप्ताहिक भृती (१)	मध्य-बिन्दू ट (२)	वारंवारता च (३)	स्तंभ (२) × स्तंभ (३) च × ट (४)
१२.५—१७.५	१५	२	३०
१७.५—२२.५	२०	२२	४४०
२२.५—२७.५	२५	१९	४७५
२७.५—३२.५	३०	१४	४२०
३२.५—३७.५	३५	३	१०५
३७.५—४२.५	४०	४	१६०
४२.५—४७.५	४५	६	२७०
४७.५—५२.५	५०	१	५०
५२.५—५७.५	५५	१	५५
		७२	२,००५

$\therefore$ मू = $\frac{२,००५}{७२}$ = २७·८५ शिलिंग

ह्या ठिकाणी उपयोगात आणलेले सूत्र असे :—

$$म = यो (च \times ठ) / डा \qquad (२)$$

वरील गणनेप्रीत्यर्थ उपयोगात आणलेल्या विधीस '**दीर्घ-रीती**' असे म्हणतात. वारंवारता व मध्य बिन्दू अहो ह्या बाजवी मोठ्या असल्या तर वरील-प्रकारे गणना करणे अतिशय क्लिष्ट व त्रासदायक होते; म्हणून खालील सिद्धान्तावर आधारित '**लघु-रीती**' चा उपयोग करावा.

तो सिद्धान्त असा : "कोणत्याही श्रेणीतील पद-अहोंच्या माध्यापासूनचा विचलनाचा एकूण बीजीय योग शून्य असतो." उदाहरणार्थ :

१० विद्यार्थ्यांना गणितात मिळालेले प्रतिशत गुण —

विद्यार्थी क्रमांक	प्रतिशत गुण	माध्यापासूनचे विचलन
१	९५	१५ टक्के
२	९२	१२
३	९०	१०
४	८६	६
५	८६	६
६	८०	०
७	७५	−५
८	७२	−८
९	६४	−१६
१०	६०	−२०
	एकूण ८०० प्रतिशत	०

$\therefore$ म = $\frac{८००}{१०}$ = ८० टक्के.

खऱ्या समान्तर मध्यकेऐवजी दुसराच एखादा माध्य निवडला तर मग आलेल्या विचलनांची बेरीज शून्य होणार नाही. वरील उदाहरणात ८० ऐवजी ९० प्रतिशत हा सुद्धा स्वेच्छमूलबिन्दू मानता येईल. त्यास मग कल्पित माध्य असे म्हणावे. ह्या कल्पित माध्यास 'म′' ही संज्ञा लावावी.

१० विद्यार्थ्यांना गणितात मिळालेले प्रतिशत गुण

विद्यार्थी क्रमांक	प्रतिशत-गुण	कल्पित-माध्यापासूनची विचलने घ
१	९५	+ ५ टक्के
२	९२	+ २
३	९०	०
४	८६	− ४
५	८६	− ४
६	८०	−१०
७	७५	−१५
८	७२	−१८
९	६४	−२६
१०	६०	−३०
	८००टक्के	−१०० टक्के

∴ कल्पित माध्यापासूनचे मध्यक विचलन = $\frac{१००}{१०}$

= −१० टक्के

आलेली ही अर्हा मूळ कल्पित माध्यात मिळविल्यास येणारा समान्तर मध्यक ९० + (−१०) = ८० हा सत्य माध्य होय.

वरील उदाहरणात आलेले कल्पित माध्यापासूनचे मध्यक विचलनास 'ग' म्हटल्यास सत्य-माध्य (म) हे कल्पित माध्य (म′) अधिक मध्यक विचलनाच्या (ग) बरोबर होय.

सूत्र-रूपाने हे समीकरण असे लिहिता येईल.:

$$म = म' + ग$$

सारणी ३ मधील न्यासाकरिता लघु-रीतीने समान्तर मध्यक गणना खालील-प्रमाणे करावी.

सारणी–४

समान्तर मध्यक गणना (लघु-रीती)

एका फॅक्टरीतील कामगारास मिळणाऱ्या साप्ताहिक भृतीच्या आधारे

मध्य–भृती ठ (१)	कल्पित माध्यापासूनचे अन्तर घ (२)	वारंवारता च (३)	स्तंभ × स्तंभ २ ३ चघ (४)
१५	– २	२	–४
२०	– १	२२	–२२
२५	०	१९	०
३०	+ १	१४	+१४
३५	+ २	३	+ ६
४०	+ ३	४	+१२
४५	+ ४	६	+२४
५०	+ ५	१	+५
५५	+ ६	१	+६
		एकूण ७२	+ ४१

$\therefore$ म′ = २५ ग = $\frac{४१}{७२}$ आणि संभागान्तराल = ५ शि.

$\therefore$ म = म′ + ग = २५ + $\frac{४१}{७२}$ × ५

= २५ + २·८५ = २७·८५ शि.

सूत्ररूपाने हे खालीलप्रमाणे दर्शविता येईल :

$$\text{म} = \text{म}' + \frac{\text{यो (च. घ)}}{\text{ह्य}} \times \text{श.} \qquad (३)$$

वरील कृतीचा थोडक्यात सारांश खालीलप्रमाणे :

(१) न्यासाची वारंवारता बंटनात रचना करावी.

(२) शक्य असल्यास गणनेकरिता कल्पित माध्य (म′) बंटनाच्या मध्यभागी धरावा.

(३) सारणीत ‘घ’ असा एक आणखी स्तंभ निश्चित करावा. कल्पित माध्य असणाऱ्या संभागास शून्य समजून, त्याच्या खालच्या संभागाला –१ व त्याच्या वरच्या संभागाला + १ ह्याप्रमाणे प्रत्येक संभागाचे मापन द्यावे.

(४) संभागाची वारंवारता (च) व त्याचे कल्पित माध्यापासूनचे विचलन (घ) ह्यांचा गुणाकार करून तो (चघ) ह्या स्तंभात लिहावा.

(५) 'चघ' —ह्या स्तंभातील सर्व संख्यांचा बीजीय योग घ्या.

(६) आलेल्या योगास एकूण वारंवारतेने (डा) भागावे. आलेला भागाकार हा संभागान्तराल एककातील शोधित 'ग' होय.

(७) शोधित 'ग' व संभागान्तराल राशीचा गुणाकार केल्यास मूल 'ग' प्राप्त होतो.

(८) मूल 'ग' व म' ची बेरीज केल्यास न्यासाचे समान्तर मध्यक येईल.

समान्तर मध्यकाची लक्षणे :

(१) समान्तर मध्यक अर्हा ही बंटनातील प्रत्येक पदावरून निश्चित करण्यात येते. हे माध्य संगणितीय असते.

(२) बंटनातील चरम—अर्हेमुळे ते लगेच बदलते.

(३) समान्तर मध्यकेपासूनच्या विचलनांचा योग नेहमी शून्य असतो.

(४) बंटनातील पदांच्या समान्तर मध्यकेपासूनच्या विचलनांच्या वर्गांचा योग हा ह्या बंटनातील इतर कोणत्याही बिन्दूपासून काढलेल्या विचलनांच्या वर्गांच्या योगापेक्षा लहान असतो.

(५) समान्तर मध्यकेचा प्रमाप विभ्रम हा मध्यकाच्या प्रमापविभ्रमापेक्षा कमी असतो.

(६) कोणत्याही परिस्थितीत समान्तर मध्यकेची अर्हा निश्चित अशी असते.

समान्तर मध्यकेचे फायदे :

(१) समान्तर मध्यक हे नेहमीच्या प्रचारातीलच एक माध्य होय.

(२) समान्तर मध्यक हे समजण्यास अतिशय सोपे असे माध्य आहे.

(३) हे माध्य सर्वत्र मान्यता पावलेले आहे.

(४) समान्तर मध्यकेचा गणन—विधी सापेक्षतः सोपा आहे.

(५) ह्या माध्याच्या गणनेत फक्त एकूण अर्हा व पद संख्येचीच आवश्यकता असते.

(६) समान्तर मध्यक हे बीजीय पद्धतीने हाताळता येते.

फक्त एकच मोठा दोष समान्तर मध्यकेत आढळतो. बंटनातील पदांच्या अर्हा जर अतिशय चरम सीमेच्या असतील तर मध्यक अर्हा ही विरूपित होते. अशा परिस्थितीत समान्तर मध्यक हे न्यासाचे आदर्श माध्य म्हणून मानता येणार नाही.

प्रकरण ३

वारंवारता बंटन–माध्य

मध्यका :

दिलेल्या न्यासातील पदांची त्यांच्या आकारमानानुसार रचना केल्यास त्यांतील मध्य पदाची जी अर्हा येईल त्यास मध्यका असे म्हणतात. न्यासात सम–पदे असल्यास दोन केन्द्रीय पदांचा समान्तर मध्यक न्यासाचा मध्य बिन्दू मानावा.

मध्यका हे स्थितीपरत्वे प्राप्त होणारे माध्य होय. समान्तर–मध्यक हे संगणित माध्य आहे.

गणना (अवर्गीत न्यास)

अवर्गीत न्यासाची मध्यका खाली दिलेल्या नियमानुसार निश्चित करावी.

(१) न्यासातील पदे ही त्यांच्या महत्तेप्रमाणे मांडावी. (ह्यासच **अनुविन्यसन** असे म्हणतात.)

(२) येणाऱ्या श्रेणीच्या मधल्या पद–अर्हेची नोंद करावी. ही मध्यका होय. न्यासात सम–पदे असतील तर श्रेणीचा मध्य–बिन्दू म्हणून दोन अर्हा येतील अशा वेळेस त्या दोन्ही अर्हांचा समान्तर मध्यक मध्यका म्हणून ओळखावा.

वर्गीत न्यास

वर्गीत न्यासाची मध्यका आन्तर गणनेद्वारा संगणित केली जाते. न्यासातील एकूण पदास (डा) दोहोंनी भागावे; व डा / २ ह्या पदाची जी अर्हा येईल, ती त्या वर्गीत न्यासाची मध्यका होय. ही अर्हा आन्तर गणनेद्वारा कशी काढावी ते खालील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल.

सारणी ५

मध्यकाचे गणन

एका फॅक्टरीतील कामगारांस मिळणाऱ्या साप्ताहिक भृतीच्या आधारे

साप्ताहिक–भृती (शिलिंग)	कामगार–संख्या (वारंवारता)	संचयी–वारंवारता
१२·५–१७·५	२	२
१७·५–२२·५	२२	२४
२२·५–२७·५	१९	४३
२७·५–३२·५	१४	५७
३२·५–३७·५	३	६०
३७.५–४२·५	४	६४
४२·५–४७·५	६	७०
४७·५–५२·५	१	७१
५२·५–५७·५	१	७२
	७२	

(१) एकूण पदे = ७२ ∴ डा / २ = $\frac{७२}{२}$ = ३६.

३६ हे पद तिसऱ्या संभागात येते. त्यात एकूण १९ पदे आहेत. पहिल्या दोन संभागात एकूण पदे २४. तेव्हा तिसऱ्या संभागातील १२ पदे त्यात मिळविल्यास आपणास मध्यका अर्हा मिळेल. तिसऱ्या संभागाचे संभागान्तर ५ शिलिंग आहे. एकूण १९ पदअर्हांची किंमत ५ शिलिंग तर फक्त १२ पदअर्हांची किंमत $\frac{१२×५}{१९}$ = ३.१५७९.

तिसऱ्या संभागान्तरालाची सुरुवात २२.५शिलिंगांनी होते. म्हणून ३६ व्या पदाची अर्हा २२.५ + ३.१६ = २५.६६ शिलिंग ही होय.

(२) ज्याप्रमाणे मध्यकाचे संगणन वारंवारतेच्या वरच्या टोकाकडून होऊ शकते, त्याचप्रमाणे त्याचे गणन वारंवारतेच्या खालच्या टोकापासूनहि शक्य आहे.

वारंवारतेच्या खालच्या टोकापासून सुरुवात केल्यास ३६ हे पद तिसऱ्या संभागातच येते. परन्तु खालच्या ६ संभागांतून एकूण २९ पदे आहेत. म्हणजे तिसऱ्या संभागातील फक्त ७ पदे त्यात आणखी मिळविल्यास आपण ३६ व्या पदावर पोहोचतो.

वरीलप्रमाणेच ह्या ७ पदांची एकूण अर्हा त्रैराशिकाने $\frac{७×५}{१९}$ = १.८४ येते. खालच्या टोकापासून सुरुवात केली म्हणून तिसऱ्या संभागाची अधर अर्हा = २७.५ शिलिंग...त्यातून १.८४ शिलिंग वजा केल्यास २७.५० – १.८४ = २५.६६ शिलिंग ही ३६ व्या पदाची, म्हणजे मध्यका अर्हा येते (वरीलप्रमाणेच).

(३) सूत्ररूपानेही मध्यका–निश्चिती शक्य आहे :

$$मा = ट_1 + \frac{\frac{डा}{२} - द_1}{द_2 - द_1} (ट_2 - ट_1) \ldots. \qquad (४)$$

ज्यात :—

मा = मध्यका.

$ट_2$ व $ट_1$ = मध्यका असलेल्या संभागाची वरची व खालची सीमा.

$द_2$ व $द_1$ = वरील संभाग सीमेतील पदांची अनुस्थिती.

वरील सूत्रात सारणी ५ मधील योग्य त्या अर्हा ठेवून,

$$मा = २२.५ + \frac{\frac{७२}{२} - २४}{४३ - २४} \times (२७.५ - २२.५)$$

$$= २५.६६ \text{ शिलिंग.}$$

मध्यकाची लक्षणे :—

(१) मध्यका हे स्थानपरत्वे येणारे माध्य होय.

(२) मध्यका—अर्हा ही एकूण पदसंख्येत बदल झाल्यासच बदलते. पदांच्या चरम अर्हेतील महत्त्वेमुळे मध्यकात बदल संभवत नाही.

(३) मध्यकापासूनच्या विचलनांचा बीजीय योग हा न्यासातील कोणत्याही इतर बिन्दूपासून घेतलेल्या विचलनांच्या बीजीय योगापेक्षा कमी असतो.

(४) श्रेणीतील केन्द्रीय अर्हा जर जवळ जवळ गुंफलेल्या असतील तर मध्यका–अर्हा ही सुद्धा अतिशय वैशिष्ट्यपूर्ण अशी असू शकते.

(५) न्यासातील कोणतीही समसंभावी अर्हा ही मध्यका अर्हेपेक्षा कमी अथवा जास्त असणे शक्य आहे आणि म्हणूनच मध्यकास 'संभावी–अर्हा' असेही म्हणतात.

मध्यकाचे उपयोग :—

(१) मध्यका गणना सोपी व सरळ आहे.

(२) असामान्य पदांमुळे मध्यका अर्हा ही विरूपित होत नाहीं.

(३) कोणत्याही श्रेणीचे मध्यका हे अधिक आदर्शवत असे माध्य होय; कारण श्रेणीतील चरम–अर्हांचा मध्यका–निश्चितीवर मुळीच परिणाम होत नाही.

(४) बंटनातील शेवटच्या अर्हा–सीमा अनिश्चित स्वरूपाच्या असल्यासही मध्यका–निश्चिती शक्य आहे.

मध्यकाचे तोटे :—

(१) मध्यका हे समान्तर मध्यकेइतके प्रचारातले माध्य नाही.

(२) मध्यका संगणित करण्यापूर्वी न्यासातील पदांची त्यांच्या महत्त्वप्रमाणे रचना करावयास हवी.

(३) समान्तर–मध्यकेपेक्षा मध्यकाचे प्रमाप–विभ्रम व संभावि–विभ्रम हे अधिक असतात.

(४) मध्यका बीजीयरीत्या हाताळणे शक्य नाही.

चतुर्थक, दशमक, शतमक

मध्यकामुळे बंटनाचे दोन समान भाग होतात. चतुर्थकामुळे बंटन चार समान भागांत विभाजित होते, तर दशमकामुळे तेच बंटन समान अशा दहा भागांत विभक्त होते. शतमकामुळे त्याचे शंभर समान भाग होतात. वरील माध्यामुळे बंटनाचे आणखी सूक्ष्म विश्लेषण शक्य होते

चतुर्थकांमुळे बंटनाचे चार समान भाग होतात; म्हणजे बंटनात एकूण तीन चतुर्थकच असतात. दुसऱ्या चतुर्थकामुळे बंटन दोन सारख्या भागात विभागले जाते; म्हणजे मध्यका व द्वितीय चतुर्थक हे एकच होत. प्रथम अथवा अधरचतुर्थकामुळे (तु$_{१}$) बंटन $\frac{१}{४} : \frac{३}{४}$ प्रमाणात विभागले जाते; तर तिसऱ्या अथवा उत्तर चतुर्थकामुळे (तु$_{३}$) तेच बंटन ३।४ : १।४ ह्या प्रमाणात विभागले जाते.

शतमकामुळे बंटनाचे शंभर भाग होतात. प्रत्येक भागात फक्त एक–प्रतिशत पदे असतात. शतमकामुळे बंटनाचे अतिसूक्ष्म विभाजन होत असल्यामुळे हे माध्य साधारणतः ज्यात मुबलक पदे असतात अशा बंटनाच्या बाबतीतच वापरणे योग्य होय. त्यामुळे प्रत्यक्षात बहुधा काही विशिष्ट शतमकांचाच उपयोग केला जातो.

चतुर्थक, दशमक व शतमक यांची निश्चिती मध्यका–निश्चितीप्रमाणे आन्तर–गणनेद्वाराच करतात. सारणी १ मधील न्यासाकरिता —

(१) प्रथम चतुर्थक (तु$_{१}$) $= \frac{७२}{४} = १८ = १७.५ + \frac{१८-२}{२२} \times ५$

$= २१.१४$ शिलिंग.

(२) तृतीय चतुर्थक (तु$_{३}$) $= \frac{३\ डा}{४} = \frac{३\times७२}{४} = ५४$

$= २७.५ + \frac{५४-४३}{१४} \times ५$

$= ३१.४३$ शिलिंग.

(३) तृतीय दशमक (धा$_{३}$) $= \frac{३\ डा}{१०} = \frac{३\times७२}{१०} = २१.६$

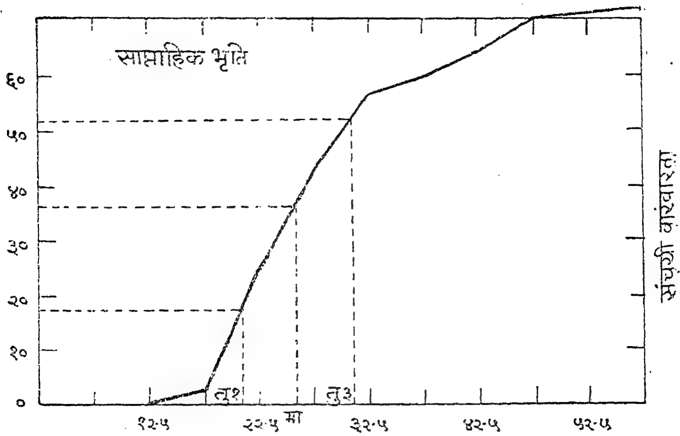
$= १७.५ + \frac{२१.६-२}{२२} \times ५$

$= २५.०$ शिलिंग.

आन्तर–गणनेद्वारा मध्यका, तु$_{१}$ व तु$_{३}$ ची निश्चिती करता येते; त्याचप्रमाणे चित्रांकणाद्वारे सुद्धा ह्या माध्याची निश्चिती होऊ शकते. (आ. १३)

भूयिष्ठक (भू) ....

वारंवारता बंटनाची य–अक्षावरील ती अर्हा जेथे बंटनातील सर्वात जास्त वारंवारता असतात त्यास भूयिष्ठक असे म्हणतात. ज्या संभागात हे भूयिष्ठक असते त्यास भूयिष्ठ–वर्ग म्हणतात. ह्या दृष्टीने पाहिल्यास कोणत्याही बंटनाचा सर्वसामान्य वर्ग हा या बंटनाचा भूयिष्ठ वर्गच होय. कारण त्याच वर्गात सर्वात अधिक वारंवारता केन्द्रित होतात.



आकृती १३ : कामगारांच्या साप्ताहिक भृतीचे संचयी–वारंवारता–बंटन.... त्यातील मध्यका व अधर आणि उत्तर चतुर्थकासह.

भूयिष्ठक गणना

बंटनात ग्रथित न होऊ शकणाऱ्या न्यासाची भूयिष्ठक–निश्चिती सहज–साध्य नाही. भूयिष्ठक-निश्चिती मध्यकाप्रमाणे आन्तरगणन विधीनेच करतात. त्याकरिता वापरावयाचे सूत्र खालीलप्रमाणे होय.

$$भू = ट_1 + \frac{च_1 - च_0}{2च_1 - च_0 - च_2}(ट_2 - ट_1) \ldots \qquad (५)$$

ज्यात,

भू = भूयिष्ठक.

$ट_1$, $ट_2$ = भूयिष्ठ–वर्गाची खालची व वरची सीमा.

$च_0$, $च_1$, $च_2$ = भूयिष्ठ वर्गाच्या खालचा वर्ग, भूयिष्ठ–वर्ग, व भूयिष्ठ–वर्गाच्या वरच्या वर्गातील वारंवारता.

सारणी १ मधील न्यासाकरिता वरील सूत्राधारे येणारे भूयिष्ठक २१·८५ शिलिंग येते :

$$भू = १७·५ + \frac{२२ - २}{४४ - २ - १९}(२२·५ - १७·५)$$

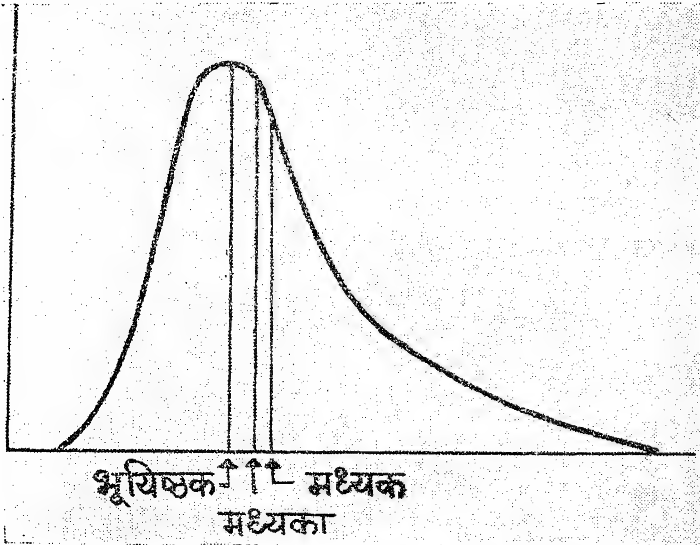
= २१·८५ शिलिंग.

वारंवारता बंटन साधारण असंमितीय असेल तर त्यातील भूयिष्ठकाची निश्चिती खालील संबंधावरून निश्चित करतात.

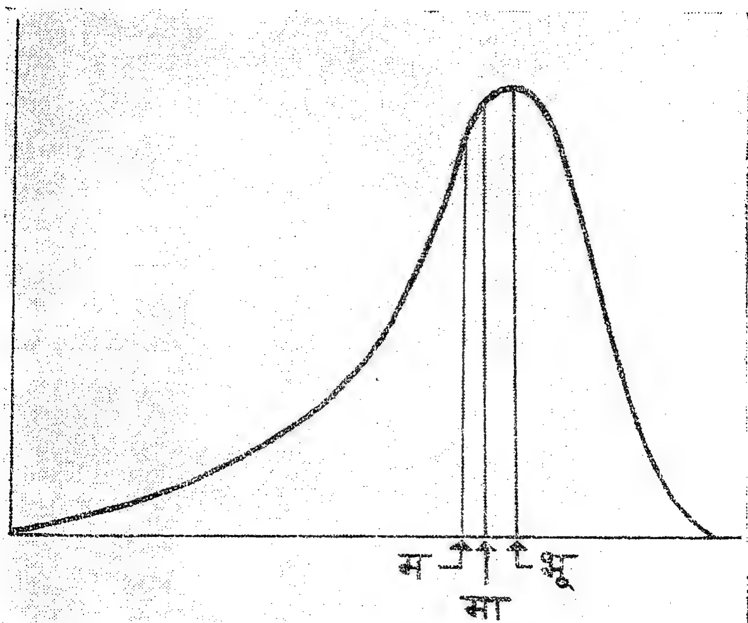
भू = म − ३ (म − मा) (६)

" संमित बंटनात समान्तर–मध्यक व भूयिष्ठक हे मध्यकाच्या परस्पर-विरुद्ध दिशेस असतात. तसेच समान्तर-मध्यकेचे मध्यकापासूनचे अन्तर, समान्तर-मध्यक व भूयिष्ठकातील अन्तराच्या $\frac{1}{3}$ असते. "

ह्या सिद्धान्ताचे अवलोकन, आणि वामायत व दक्षिणायत विषमता बंटनातील समान्तर-मध्यक, मध्यका व भूयिष्ठकाचे स्थान आकृति १४ व १५ वरून लक्ष्यात येईल.



आकृती १४ :— उपकाल्पनिक वामायत–विषमता–बंटनातील भूयिष्ठक (भू), मध्यका (मा) व समान्तर–मध्यकेची (म) अनुस्थिती.



आकृती १५:—उपकाल्पनिक दक्षिणायत विषमता वंटनात म, मा व भूचे स्थान.

वरील विधीशिवाय खालील प्रकारानेही भूयिष्ठक-निश्चिती होऊ शकते.

(अ) वर्गण-विधीने.

(ब) वारंवारता वंटनाच्या सरलनाने.

(क) चलिष्णु माध्य द्वारा.

(ड) गणितीय वक्र द्वारा.

भूयिष्ठकाची लक्षणे :

(१) भूयिष्ठक-अर्हा ही वंटनाची विशिष्ट अशी सर्वसाधारण केन्द्रीय अर्हा होय.

(२) भूयिष्ठक-अर्हा निश्चितीवर वंटनातील चरमपदांचा कसलाही परिणाम होत नाही.

(३) भूयिष्ठक हे स्थिति-निदर्शक माध्य आहे.

भूयिष्ठकाचे उपयोग :

(१) भूयिष्ठक हे बंटनाचे नमुनेदार (Typical) वर्णनात्मक माध्य होय.

(२) मोजक्याच पदसंख्या असल्यास, भूयिष्ठक हे अवलोकनाने सुद्धा निश्चित करिता येते.

(३) बंटनातील अर्हा मोजक्याच असल्या तर भूयिष्ठक-निश्चिती करिता अनुविन्यसनाची आवश्यकता नाही.

भूयिष्ठकाचे तोटे :

(१) मोजका न्यास असल्यासच भूयिष्ठक-निश्चिती सहजतेने होऊ शकते.

(२) बंटनात अत्यधिक अर्हा नसतील तर भूयिष्ठकाची सार्थकताही अनुल्लेखनीयच असते.

(३) बंटनाची पदसंख्या कमी असल्यास त्यातून भूयिष्ठक–निश्चिती शक्य नाही, कारण अर्हांच्या पुनरावृत्तींची शक्यता अशा बंटनात नसते.

गुणोत्तर–मध्यक :

कोणत्याही ‘ ड ’–संख्यांच्या गुणाकाराच्या ‘ ड ’–वर्गमूळास त्या संख्येचा गुणोत्तर–मध्यक असे म्हणतात. सूत्ररूपाने ह्याची मांडणी अशी :

$$ण = \sqrt[ड]{क_१ . क_२ . क_३ \cdot \ldots क_ड} \qquad (७)$$

२, ४ व ८ चा गुणोत्तर – मध्यक असा :

$$ण = \sqrt[३]{२ \times ४ \times ८} = \sqrt[२]{६४} = ४$$

छेदाचा उपयोग केल्यास गुणोत्तर–मध्यक गणना सुगम होते.

$$छे. ण = \frac{छे. क_१ + छे. क_२ + \ldots + छे. क_ड}{डा} \qquad (८)$$

गुणोत्तर–मध्यकाची लक्षणे :

(१) गुणोत्तर मध्यक ही संगणित अर्हा असून बंटनातील अर्हांच्या महत्त्वर ती अवलंबून असते.

(२) गुणोत्तर–मध्यक हे समान्तर–मध्यकेप्रमाणे बंटनातील चरम पद–अर्हांमुळे विशेष विरूपित होत नाही.

(३) कोणत्याही श्रेणीचे गुणोत्तर–मध्यक हे त्या श्रेणीच्या समान्तर–मध्यकेपेक्षा लहान असते.

गुणोत्तर-मध्यकाचे उपयोग :

गुणोत्तर-मध्यक हे समान्तर-मध्यकेपेक्षा अधिक चांगले व नमुनेदार असे माध्य होय. कारण, बंटनातील चरम अर्हांचा त्याच्यावर विशेष परिणाम होत नाही.

(२) गुणोत्तर-मध्यक हे बीजीयरीत्या हाताळता येते.

(३) गुणोत्तर-मध्यक हे देशनांक-गणनेत विशेष उपयोगी आहे.

गुणोत्तर-मध्यकाचे तोटे :

(१) गुणोत्तर-मध्यक हे माध्य विशेष प्रचारातले असे माध्य नाही.

(२) गुणोत्तर-मध्यकाची गणनाही बव्हंशी जड व क्लिष्ट असते.

(३) बंटनातील काही अर्हा ऋण असल्यास अथवा त्यातील एखादे पद शून्य असेल तर गुणोत्तर-मध्यक निश्चिती शक्य नसते.

हरात्मक-मध्यक (ह) :

कोणत्याही श्रेणींचे हरात्मक-मध्यक हे त्या श्रेणीच्या गुणोत्तर-मध्यकाचा व्युत्क्रम होय. त्याचे सूत्र असे :

$$\frac{१}{ह} = \frac{\frac{१}{क_१} + \frac{१}{क_२} + \frac{१}{क_३} + \dots + \frac{१}{कड}}{डा} \qquad (९)$$

हरात्मक मध्यकाचा उपयोग अर्हांचा माध्य काढण्याकरिता करतात.



प्रकरण ४

वारंवारता बंटन–अपकिरण व विषमता

अपकिरण

वारंवारता बंटन विश्लेषणात बंटनाचे माध्य अथवा केन्द्रीय–अर्हेची निव्वळ माहिती घेऊनच फायदा नाही, तर त्या बंटनातील पदांची केन्द्रीय अर्हेपासूनच्या विचलनाची मात्राही समजावयास हवी. बंटनातील विचलनाची ही मात्रा अत्याधिक असेल तर केन्द्रीय अर्हेस त्या न्यासाची निदर्शक अर्हा मानणें विशेष योग्य होणार नाही.

माध्यापासूनचे हे विचलन मोजता यावे म्हणून योग्य असा इयत्तात्मक–मापांक–गणनविधी उपयोगात आणावयास हवा.

विस्तार :

न्यासातील अत्युच्च व अधर अर्हांतील तफावतीस विस्तार असे म्हणतात. सर्वांत सोपे असे हे एक अपकिरणमापांक होय. कोणत्याही श्रेणीविषयी त्यापासून प्रायमिक अशी कल्पना करिता येते. खाली दिलेल्या 'अ' व 'ब' श्रेणीचा विस्तार ३० प्रतिशत आहे. त्यातील अपकिरण मात्र सारखे नाहीत.

१० विद्यार्थ्यांचे परीक्षेतील गुण :

विद्यार्थी क्रमांक	परीक्षेतील प्रतिशत गुण	
	अ–परीक्षा	ब–परीक्षा
१	६०%	६०%
२	६०	६५
३	६१	७०
४	६३	७२
५	६५	७५
६	६५	७८
७	६६	८०
८	६७	८५
९	६८	८८
१०	९०	९०

विस्ताराची लक्षणे :

(१) गोचर(विस्तार) हे सोपे व सहज समजणारे असे अपकिरण–मापांक होय.

(२) त्याची गणनाहि सहजसाध्य आहे.

(३) त्याची अर्हा ही फक्त दोनच पदांवर अवलंबून असते, न्यासातील अत्युच्च व अधर अर्हा.

(४) ह्या दोन पदांव्यतिरिक्त न्यासांतील इतर पदांची माहिती असावीच असे नाही.

(५) गिव्वळ ह्या दोन पदांवरच गोचर अवलंबून असल्यानें, एखादेवेळेस ही दोन पदे अगदीच भिन्न व अप्रमाणबद्ध असली तर विस्तार अत्याधिक विरूपित होते.

मध्यक विचलन :

बंटनातील अत्युच्च व अधर अर्हेवरच विस्तार हे बंटनाचे अपकिरण–मापक अवलंबून असते. अर्थात् त्यामुळे बंटनातील इतर पद–अर्हांचा ह्या अपकिरण–मापकांशी संबंध येत नाही. आणि म्हणूनच बंटनातील प्रत्येक पद–अर्हा विचलनाचा ज्याशी संबंध आहे, अशा अपकिरण–मापकांची आवश्यकता अधिकच भासते. मध्यक–विचलन हे अशा तऱ्हेचे अपकिरण–मापांक होय.

बंटनाच्या केन्द्रीय–अर्हेपासून (समान्तर–मध्यक अथवा मध्यका) बंटनातील प्रत्येक पदाच्या विचलनाचा माध्य काढल्यास त्यास मध्यक विचलन असे म्हणतात.

सारणी १ मधील साप्ताहिक भृतीच्या न्यासाकरिता हे मध्यक–विचलन खालीलप्रमाणें काढावे.

सारणी ६

मध्यक विचलनाचे गणन.

एका फॅक्टरीतील कामगारांस मिळणाऱ्या साप्ताहिक–भृतीकरिता

साप्ताहिक–भृती १	केन्द्रीय भृती–अर्हा (ठ) २	कामगारांची वारंवारता (च) ३	'म' पासून विचलन (घ) ४	(चघ) ५
१२.५–१७.५	१५	२	१२.८५	२५.७०
१७.५–२२.५	२०	२२	७.८५	१७२.७०
२२.५–२७.५	२५	१९	२.८५	५४.१५
२७.५–३२.५	३०	१४	२.१५	३०.१०
३२.५–३७.५	३५	३	७.१५	२१.४५
३७.५–४२.५	४०	४	१२.१५	४८.६०
४२.५–४७.५	४५	६	१७.१५	१०२.९०
४७.५–५२.५	५०	१	२२.१५	२२.१५
५२.५–५७.५	५५	१	२७.१५	२७.१५
		७२		५०४.९०

$$म = २७.८५ \quad म.\ वि.\ (रि) = \frac{५०४.९०}{७२} = ७.०१२५ \text{ शिलिंग.}$$

वरील उदाहरणांवरून लक्ष्यात येईल की, मध्यक-विचलन गणनेत बीजाय चिन्हांचा विचार करीत नाही.

मध्यक-विचलनाची लक्षणे :

(१) मध्यक-विचलन अर्हा ही श्रेणीतील प्रत्येक पदाच्या अर्हेवर अवलंबून असते.

(२) बंटनाचे मध्यक-विचलन हे बंटनातील समान्तर मध्यक अथवा मध्यकापासूनही काढल्यास चालते.

(३) मध्यकापासून घेतलेली सर्वसाधारण विचलने मात्र अल्पिष्ठ असतात.

मध्यक-विचलन गणनेत खालील सूत्राचा उपयोग करतात.

$$रि = \frac{यो\ (चघ)}{डा} \qquad (१०)$$

रि = मध्यक विचलन.

यो (चघ) = बंटनातील वारंवारता (च) आणि बंटनातील प्रत्येक पद-अर्हेचे समान्तर-मध्यक अथवा मध्यकापासूनचे विचलन (घ) चा एकूण योग.

डा = बंटनातील एकूण पदसंख्या.

वरील विधीचा थोडक्यात सारांश असा:—

(१) संभागान्तरालातील मध्यबिन्दूचे बंटनाच्या समान्तर-मध्यक अथवा मध्यकापासूनचे विचलन काढा.

(२) ह्या विचलनांचा व संबंधित वारंवारतेचा गुणाकार करा.

(३) आलेल्या गुणाकाराच्या एकूण योगास बंटनाच्या एकूण पद-संख्येने भागा.

येणारा परिणाम त्या बंटनाची ' रि ' = मध्यक विचलन होय.

ह्याशिवाय आणखी सरल व सोपी रीती खालीलप्रमाणे:—

(अ) कोणतेही एक काल्पित-माध्य घ्या. हे काल्पित-माध्य बंटनाचे समान्तर-मध्यक अथवा मध्यका ज्या संभागान्तरालात पडते, तेच धरल्यास बरे !

(ब) ह्या काल्पिक-माध्यापासून प्रत्येक संभागान्तरालातील मध्य-बिन्दूचे विचलन काढा; व मग वरील प्रकारेच बंटनाचा म. वि. काढा.

प्रमाप–विचलन

बीजीय चिन्हांचा योग्य तो परामर्श न घेता केलेली गणना ही शास्त्रशुद्ध नव्हे ! त्याकरिता ह्या चिन्हांचा योग्य असा परामर्श घेऊन परिशुद्ध अशी गणना फक्त प्रमाप–विचलन गणनेतच केली जाते. प्रमाप–विचलनाची गणना करताना न्यासातील प्रत्येक पदाचे समान्तर–मध्यकेपासूनचे जे विचलन येते, त्या विचलनाच्या वर्गांचा योग घेऊन त्या योगाच्या माध्याचे वर्गमूळ काढतात. समान्तर–मध्यकेपासून घेतलेली ही विचलने उपरिनिर्दिष्ट परिस्थितीत अलिप्त असतात.

प्रमाप–विचलनाचे सूत्र असे :—

$$\therefore \text{प्र.च. (धि)} = \sqrt{\text{यो. घ}^2 / \text{डा}} \qquad (११)$$

अवर्गीत न्यासाकरिता ही गणना खालीलप्रमाणे करावी.

सारणी–७

प्रमाप विचलन गणना : अवर्गीत न्यास.

एप्रिल १८, १९३४ रोजी जॉइंट स्टॉक बँकेच्या बॉण्डची किंमत.

बँका (१)	प्रतिशत अर्ध (२)	सराफकट्ट्यावरील किंमत (३)	म=७०.५ पासून 'घ' (४)	घ^2 (५)
अटलांटा	५%	७१	०.५	०.२५
बर्लिंगटन	,,	६५	–५.५	३०.२५
चिकागो	,,	४१	–२९.५	८७०.२५
डलस	,,	८०	९.५	९०.२५
डेनवर	,,	७३	२.५	६.२५
डेसमोनेस	,,	७८	७.५	५६.२५
फोर्ट वेन	,,	७१	०.५	०.२५
फर्स्ट कॅरोलिना	,,	६९	–१.५	२.२५
फर्स्ट टेक्सास	,,	७१	०.५	०.२५
लिंकोल्न	,,	७९	८.५	७२.२५
लुईसव्हिले	,,	७५	४.५	२०.२५
न्यूयॉर्क	,,	७३	२.५	६.२५
		एकूण ८४६	०	११५५.००
		माध्य ७०.५	–	९६.२५

मूळ : वॉल स्ट्रीटचे जर्नल :

$$\text{धि} = \sqrt{\text{योः}\ \text{घ}^{2} / \text{डा.}} = \sqrt{९६.२५}$$

$$= ९.८१.$$

श्रेणीतील पदसंख्या बरीच अधिक असेल तर बंटनात त्याची रचना करून मगच त्या न्यासाचे प्रमाप विचलन काढणे हितावह असते. अशा वेळेस वरील सूत्र थोड्याफार फरकाने उपयोगात येते, ते असे:

$$\text{प्र. च. (धि)} = \sqrt{\text{यो(च·घ}^{2}\text{)} / \text{डा}} \ldots \qquad (१२)$$

वर्गित न्यासाकरिता पण दीर्घ रीतीप्रमाणें धि–ची गणना खालीलप्रमाणे करावी.

सारणी–८

प्रमाप विचलन गणना: वर्गित न्यास.

दीर्घ रीतीप्रमाणे

अमेरिकेतील ५०,००० लोकसंख्येवरील १५१ शहरांकरिता कर चुकविणाऱ्यांची प्रतिशतता.

कर चुकविणारे प्रतिशत १	मध्यबिंदू (ठ) २	शहराची वारंवारता (च) ३	म=२८.२६ पासून (घ) ४	घ² ५	चघ² ६
० – ४.९९	२.५०	१	–२५.७६	६६३.५७७६	६६३.५७७६
५ – ९.९९	७.५०	१२	–२०.७६	४३०.९७७६	५१७१.७३१२
१०–१४.९९	१२.५०	१९	–१५.७६	२४८.३७७६	४७१९.१७४४
१५–१९.९९	१७.५०	२४	–१०.७६	११५.७७७६	२७७८.६२२४
२०–२४.९९	२२.५०	१९	–५.७६	३३.१७७६	६३०.३७४४
२५–२९.९९	२७.५०	१९	–०.७६	०.५७७६	१०.९७४४
३०–३४.९९	३२.५०	१६	४.२४	१७.९७७६	२८७.६४१६
३५–३९.९९	३७.५०	१५	९.२४	८५.३७७६	१२८०.६६४०
४०–४४.९९	४२.५०	१२	१४.२४	२०२.७७७६	२४३३.३३१२
४५–४९.९९	४७.५०	८	१९.२४	३७०.१७७६	२९६१.४२०८
५०–५४.९९	५२.५०	२	२४.२४	५८७.५७७६	११७५.१५५२
५५–५९.९९	५७.५०	०	२९.२४	८५४.९७७६	०
६०–६४.९९	६२.५०	२	३४.२४	११७२.३७७६	२३४४.७५५२
६५–६९.९९	६७.५०	२	३९.२४	१५३९.७७७६	३०७९.५५५२
		१५१			२७५३७.०१७६

मूळ :–डून व ब्रॅडस्ट्रीटच्या नगरपालिकांचे परीक्षण (Review).

$$\text{धि} = \sqrt{\frac{\text{यो}(\text{चघ}^2)}{\text{डा}}} = \sqrt{\frac{२७५३७\cdot०१७६}{१५१}} = १३\cdot५० \%$$

सारणी ८ मधील गणना ही अतिशय क्लिष्ट व कंटाळवाणी होते. ह्याकरिता नेहमी-प्रमाणे कल्पित माध्याचा उपयोग करून प्रमाप–विचलन काढणे केव्हाहि सोपे व श्रेयस्कर होय. कल्पित माध्यावरून प्रमाप–विचलन काढताना वापरावयाचे सूत्र असे—

$$\text{प्र. च. (धि)} = \text{श} \times \sqrt{\frac{\text{यो च (घ)}^2}{\text{डा}} - \left(\frac{\text{यो चघ}}{\text{डा}}\right)^2} \quad (१३)$$

ज्यात : धि = प्रमाप–विचलन.
श = संभागान्तराल.
च = वारंवारता.
घ = पदाचे विचलन.
डा = एकूण पदे.

सारणी–९

प्रमाप विचलन गणना : वर्गीत न्यास.

लघु–रीती द्वारा : कल्पित–माध्यावरून.

एका फॅक्टरीतील कामगारांस मिळणाऱ्या साप्ताहिक–भृतीकरिता.

(१) केन्द्रिय भृती (ठ)	(२) वारंवारता (च)	(३) क. मा. विचलन (घ)	(४) चघ	५ चघ^2
शि. १५	२	–२	– ४	८
२०	२२	–१	–२२	२२
२५	१९	०	०	०
३०	१४	+१	+१४	१४
३५	३	+२	+ ६	१२
४०	४	+३	+१२	३६
४५	६	+४	+२४	९६
५०	१	+५	+ ५	२५
५५	१	+६	+ ६	३६
	७२		+४१	२४९

$$\text{धि} = ५\sqrt{\frac{२४९}{७२} - \left(\frac{४१}{७२}\right)^2}$$

$$= ५\sqrt{\frac{१,६२४७}{५१८४}} = ८\cdot८५ \text{ शिलिंग}$$

प्रमाप–विचलनाची लक्षणे.

(१) प्रमाप–विचलनाची अर्हा ही न्यासातील प्रत्येक पद–अर्हेनुसार बदलते.

(२) प्रमाप–विचलन काढताना मध्यक–विचलनापेक्षाही अधिक भर न्यासातील चरमसीमेवर असतो; कारण, प्रमाप–विचलनाच्या संगणनेत सर्वच अर्हांचा वर्ग घ्यावा लागतो.

(३) घंटाकार वक्रातील मध्यक – विचलन हे प्रमाप – विचलनाच्या ०·७९७९ पट असते. साधारण विषम बंटनातून मात्र वरील संबंध थोड्याफार फरकाने आढळून येतो.

(४ अ) प्रसामान्य बंटनातील य–अक्षावर समान्तर मध्यकेच्या दोन्ही बाजूंस जर एक प्रमाप–विचलन एवढे अन्तर घेतले तर त्या सीमेत न्यासाच्या एकूण अर्हांच्या ६८·२६ प्रतिशत अर्हा असल्याचे आढळून येईल.

(ब) — २ प्रमाप–विचलन एवढे अन्तर घेतले तर ९५·४६ प्रतिशत अर्हा त्या सीमेत आढळतील.

(क) — आणि हेच अन्तर ३ 'धि' केल्यास त्यात ९९·७३ प्रतिशत पद–अर्हा आढळतील.

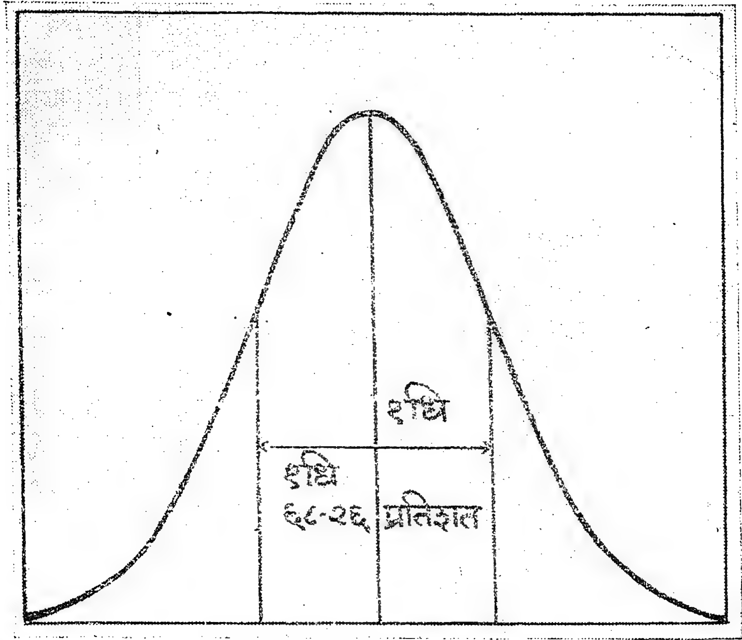
वरील प्रतिशतता फक्त प्रसामान्य बंटनाच्या बाबतीतच खरी असल्याचे आढळून येते. साधारण विषम बंटने असल्यास ही प्रतिशतता त्या अंकाच्या जवळपास कोठेतरी आढळून येते. नेहमीच्या कामाकरिता मग त्याचा उल्लेख खालील-प्रमाणे करावा.

"प्रसामान्य बंटनातून ± १ धि एवढ्या सीमेत ६८ प्रतिशत; ± २ धि अंतरांत ९५ प्रतिशत; व ± ३ धि अन्तरात जवळजवळ सर्वच (म्हणजे ९९·७) अर्हा सामाविलेल्या असतात." (आकृती १६)

(५) घंटाकार अथवा साधारण विषम वक्रातील समान्तर–मध्यकेच्या दोहो बाजूंकडील ३-धि अन्तरात सर्वच (९९·७) अर्हा येतात; त्याअर्थी प्रमाप विचलनाची अर्हा ही त्या न्यासातील विस्ताराच्या $\frac{1}{6}$ असावयास हवी. (साधारणत:)

चतुर्थक विचलन

वारंवारता बंटनातील अपकिरणाचा अंश ज्या प्रमाणात वाढतो त्या प्रमाणात बंटनाच्या चतुर्थकातील अंतरहि वाढत जाते किंवा चतुर्थकातील अंतर ज्या प्रमाणात कमीजास्त होते त्याच प्रमाणात वारंवारता बंटनातील अपकिरणही कमी-जास्त होते. ह्याच कारणास्तव वारंवारता बंटनातील अपकिरण मापांकाचे चतुर्थ-कातील हे अन्तर आधार म्हणून मानले जाते.



आकृति १६ – प्रसामान्य–बंटनातील समान्तर–मध्यकेपासून ± १ धि अन्तरात सामावणारे प्रतिशत क्षेत्र.

वारंवारता बंटन संपूर्ण संमितीय असेल तर मध्यकापासूनचे त्याच्या दोन चतुर्थकातील अन्तर सारखे असते. मध्यका तथा प्रथम किंवा तृतीय चतुर्थकातील हे अन्तर प्रथम ते तृतीय चतुर्थकालातील अन्तराच्या निम्मे असते. ह्या अन्तरासच चतुर्थक विचलन असे म्हणतात. बंटनातील अपकिरण मापनास्तव त्याचा उपयोग होतो.

$$\text{तु. वि.} = \frac{\text{तु}_{३} - \text{तु}_{१}}{२} \qquad (१४)$$

तु. वि. = चतुर्थक विचलन.

$\text{तु}_{३}$ = तृतीय चतुर्थक.

$\text{तु}_{१}$ = प्रथम चतुर्थक.

सारणी १ मधील न्यासाकरिता तु. वि. असा :—

$$\text{तु. वि.} = \frac{३१·४३ - २१·१४}{२}$$

बंटनातील चतुर्थक अंतराच्या मध्य–बिन्दूपासून दोहो बाजूंस १ तु. वि. एवढे अन्तर धरले तर त्या अन्तरात बंटनातील ५० प्रतिशत अर्हा येतात. ह्या मध्यबिन्दूस "सा" असे म्हणतात. संमित बंटनात "सा" ची अर्हा व मध्यका–अर्हा एकच असते.

आतापर्यंत वर्णन केलेले अपकिरण–मापांक हे निरपेक्ष–मापांक होत. त्यापासून प्राप्त होणाऱ्या अर्हा ह्या तौलनिकदृष्ट्या विशेष उपयोगाच्या नाहीत. उदाहरणार्थ, पुण्याच्या एकाच शाळेतील विद्यार्थ्यांच्या वयाच्या 'धि' ची त्याच शाळेतील विद्यार्थ्यांच्या बुद्धि–अंकाच्या 'धि' शी तुलना करिता येणार नाही. कारण ह्या दोन्ही प्रमाप–विचलनांच्या मापनात उपयोगात आणलेले एकक अगदी भिन्न आहेत.

त्याचप्रमाणे ज्या माध्यापासून ही विचरणे मोजण्यात येतात, त्या माध्याच्या परिमाणाशीही ह्या अपकिरण मापांकाची तुलना करावयास हवी. ज्याची सर्वसाधारण किंमत १० रु. आहे, पण ज्यातील विचरण रु. ५ आहे, अशा शेअरचा विस्तार व अर्हा ही ज्या शेअरची सर्वसाधारण किंमत १०० रु. आहे, पण ज्यातील विचरण मात्र वरीलप्रमाणेच फक्त रु. ५ आहे, त्याच्याबरोबर होणार नाही.

अशी तुलना शक्य व्हावी म्हणून प्रमाप–विचलनाला त्याच्या समान्तर मध्यकेने भागून त्याचे मग प्रतिशततेत रूपांतर करावे. अशा तऱ्हेने प्राप्त होणाऱ्या मापांकास '**विचरण–मापांक**' असे म्हणतात.

सारणी १ मधील न्यासाकरिता हे विचरण–मापांक ३१·७९ प्रतिशत येते.

$$\text{वि. पा. (फा)} = \frac{\text{धि}}{\text{म}} \times १०० \qquad (१५)$$

$$\text{फा} = \frac{८·८५}{२७·८५} \times १००$$

$$= \frac{८८५}{२७·८५} = ३१·७९\ \%$$

विषमता माप

वारंवारता बंटनातील असंमिती मोजण्यासाठी विषमता–मापांकाचा उपयोग होतो.

संमित–बंटनात समान्तर–मध्यक, मध्यका व भूयिष्ठकाच्या अर्हा सारख्याच असतात. असंमितीय बंटनात वरील अर्हा निरनिराळ्या असतात. समान्तर–मध्यक हे बंटनाच्या चरम सीमेतील पद–अर्हांमुळें विशेष विरूपित होते, व म्हणून भूयिष्ठका–

पासून ते अधिक दूर जाते. भूयिष्ठक मात्र बंटनातील असामान्य अशा पद–अर्हांमुळे विशेष विरूपित होत नाहीं. समान्तर–मध्यकेत व भूयिष्ठकात जेवढे जास्त अन्तर असेल, त्या प्रमाणात बंटनातील विषमता आधिक असे समजावे.

समान्तर–मध्यकेतील व भूयिष्ठकातील हे अन्तर विषमता–मापकांसाठी उपयोगात येते. हे अन्तर ज्या प्रमाणात कमीजास्त असेल त्याच प्रमाणात बंटनातील विचरणही कमीजास्त असते. विषमता मापांक हे विचरण मापांकाप्रमाणे तुलनेसाठी वापरतात. अर्थात मग निरनिराळ्या एककाचा प्रश्नही अशा वेळेस विषमता मापांकाच्या बाबतीत तुलना करताना उद्भवतो. याकरिता दोन माध्यातील ह्या अन्तरास प्रमाप–विचलनाने भागावे.

$$(\text{ष}_1)\ \text{वि. म.} = \frac{\text{म} - \text{भू}}{\text{धि}} \qquad (१६)$$

साधारण असंमित बंटनातून समान्तर–मध्यक आणि भूयिष्ठकातील अन्तर हे त्याच बंटनातील समान्तर–मध्यक आणि मध्यकातील अन्तराच्या तिप्पट असते. यासाठी वरील सूत्र खालीलप्रमाणेही लिहिता येईल.

$$(\text{ष}_1)\ \text{वि. म.} = \frac{३\,(\text{म} - \text{मा})}{\text{धि}} \qquad (१७)$$

संमित बंटनात समान्तर–मध्यक, मध्यका आणि भूयिष्ठकाच्या अर्हा समान असतात. अशा परिस्थितीत विषमता–माप शून्य असते.

दाक्षिणायत–विषमता–बंटनातून समान्तर–मध्यक अर्हा ही इतर अर्हांपेक्षा आधिक असते. त्यामुळे (म–भू) ही अर्हाही आधिक अथवा धन असेल. अर्थात त्यामुळे वि. म. नेहमीच धन असणार. वामायत–विषमता–बंटनातून समान्तर–मध्यक अर्हा ही इतर माध्यांच्या अर्हांपेक्षा कमी असते; त्यामुळे अशा बंटनाचे वि. म. हे नेहमीच ऋण असते.

वारंवारता बंटनातील चतुर्थकांच्या स्थानानुसार सुद्धा विषमता मापांकाची मोजणी शक्य आहे. संमित बंटनातील प्रथम व तृतीय चतुर्थक हे समान अंतरावर असतात. बंटन जसजसे विषम होते तसतसे हे अन्तरही असमान होते. आत्यंतिक असंमित अशा बंटनातून तर चतुर्थक व मध्यकातील ह्या अंतरात तीव्र अशी तफावत आढळून येते. ह्या तफावतीस अथवा अन्तरास तु. वि. ने भागल्यास बंटनाचा वि. म. प्राप्त होतो.

$$(\text{ष}_2)\ \text{वि. म.} = \frac{(\text{तु}_3 - \text{मा}) - (\text{मा} - \text{तु}_1)}{\text{तु. वि.}} \qquad (१८)$$

संमित बंटनात वरील वि. म. शून्य असतो. दाक्षिणायत–विषमता–बंटनातून $तु_३$ ची क्षहा $तु_२$ (मा) पेक्षा अधिक असल्याने असल्या बंटनाचा वि. म. अधिक म्हणजे धन असतो. वामायत–विषमता–बंटनात $तु_२$ ची अहा $तु_३$ पेक्षा अधिक असते; म्हणून अशा प्रकारच्या सर्व बंटनाचा वि. म. नेहमी ऋण असतो.

सारणी १ मधील न्यासाकरिता $ष_१$ व $ष_२$ चे मापन खालीलप्रमाणे:—

$$ष_१ = \frac{२७.८५-२१.८५}{८.८५}$$
$$०.६८$$

आणि—

$$ष_२ = \frac{३१.४३ + २१.१४ - ५१.३२}{३१.४३ - २१.१४}$$
$$= \frac{१.२५}{१०.२९} = ०.१२$$

ककुद्–वक्रता—

वारंवारता बंटनाचे त्याच्या शिखर–उंचीवर अवलंबित असे आणखी एक मापांक आहे. त्यास ककुद्–वक्रता असे म्हणतात. प्रसामान्य–बंटनापेक्षा सदर शिखर–उंची अधिक असेल तर त्या बंटनास कुट–ककुद्मी असे म्हणतात. हाच अंश कमी असेल तर त्या बंटनास चिपिट–ककुद्मी असे म्हणतात. प्रसामान्य बंटनाइतकाच शिखर–उंचीचा हा अंश असेल तर त्यास मध्य–ककुद्मी असे म्हणतात. हे बंटनाचे वक्रता–मापन खालील सूत्राद्वारे काढता येते.

$$क = आ - ३$$

ज्यात

$$आ = \frac{य.या^४}{डा} + \left(\frac{य.या}{डा}\right)^२$$

(पहा : प्रकरण १५)

प्रकरण ५

कालिक–श्रेणी–विश्लेषण

(प्रवृत्ती)

इयत्तात्मक न्यासाची त्याच्या कालक्रमानुसार मांडणी केल्यास तयार होणाऱ्या श्रेणीस **कालिक–श्रेणी** असे म्हणतात.

कालिक श्रेणी विश्लेषणात त्या श्रेणीतील एका विवक्षित कालखंडात होणारे जे अनेक बदल असतात त्यांचे विवरण व मापन मुख्यत्वे असते. हे बदल खालील प्रकारचे होत :—

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ती : इयत्तात्मक न्यासातील दीर्घ कालातील आरोह अथवा अवरोह. हा दीर्घ कालखंड साधारणतः दहा वर्षांपेक्षा कमी असू नये.

२. **आर्त्तव विचरण :** न्यासांतर्गत बारा महिन्यांच्या कालखंडातून आढळून येणारी सर्वसाधारण नियमित गती. ही गती वर्षागणिक असून ऋतूतील बदला-मुळे संभवते.

३. **चक्रिक उच्चावचन :** सदर उच्चावचनाची गती ही भरभराटीपासून मंदी ते सुधारणा व पुन्हा भरभराटीच्या कालखंडापर्यंतच्या चक्रिक रूपात मोजली जाते. ही गती त्यातील अवसर, वेळ व त्याचा वेग ह्यांवर अवलंबून असते.

४. **समसंभावी विचरण :** महायुद्ध, संकटे, संप, सामाजिक कल्पना आदीसारख्या अनियमित क्षुब्धतेमुळे उत्पन्न होणाऱ्या विचरणास समसंभावी विचरण असे म्हणतात.

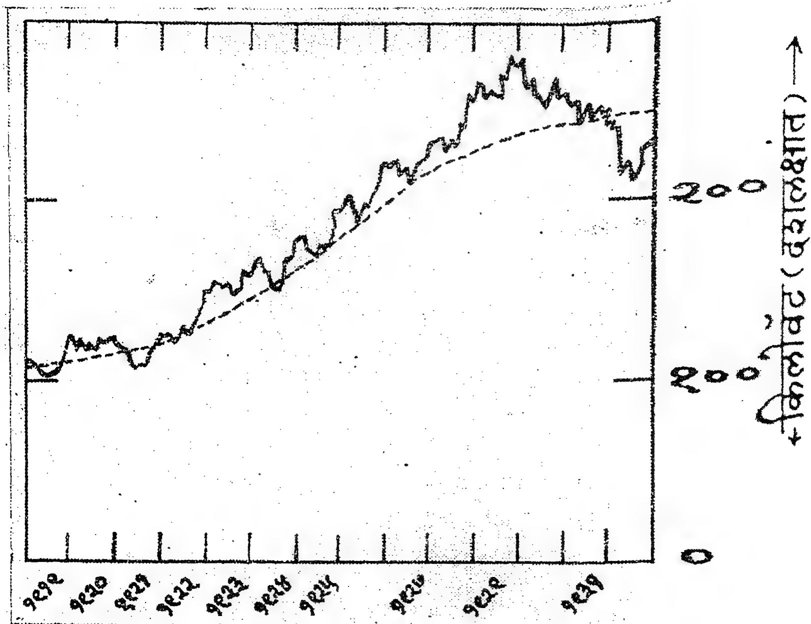
प्रवृत्ति–मापन

कालिक–श्रेणीतील प्रवृत्तीच्या मापनार्थ खालील चार विधींचा उपयोग होतो.

(अ) मुक्तबाहू.
(ब) अर्ध–माध्य.
(क) चलिष्णु–माध्य.
(ड) अल्पतम वर्गरीती.

विधि–दर्शन :

१. **मुक्तबाहू**:—न्यासाच्या काढलेल्या चित्रांकणात एक रेषा अशा रीतीने बसविण्यात येते की, ती रेषा त्या न्यासातील दीर्घ अशा कालखंडातील गतिविधी स्पष्ट करते. (आकृती १७)

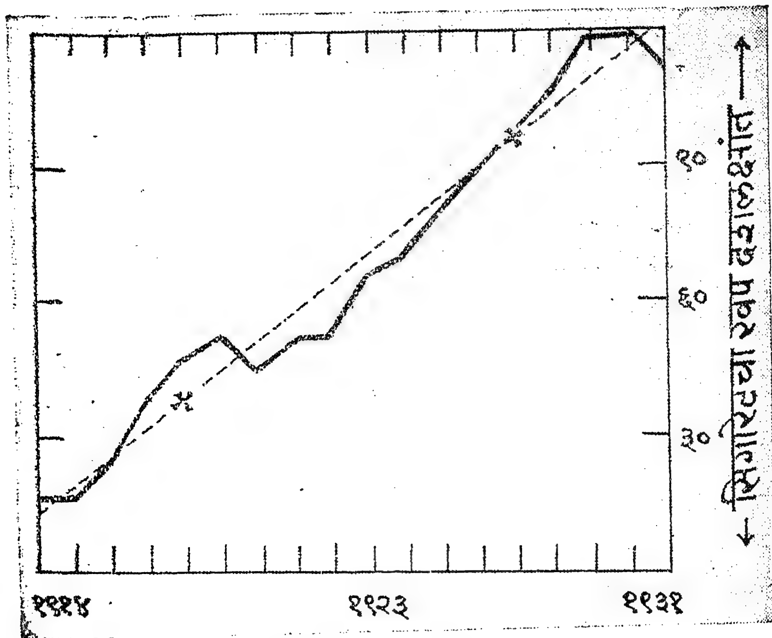


आकृती १७ : १९१९ ते १९३२ दरम्यानचे यू. एस्. ए. तील
रोजची सर्वसाधारण वीज–निर्मिती.

(मुक्तबाहू–रेषेद्वारा प्रवृत्तिदर्शन.)

ही रेषा काढताना स्वानुभवावर अधिक विसंबून राहावे लागते. प्रयत्नांअंती सदर रेषा गणितीय रेषेइतपत जुळते. तरी पण त्यात वैयक्तिक मताधिक्य जास्त असल्यानें ही संपूर्णतया अधिक विश्वासार्ह म्हणून मानता येणार नाही. मुक्तबाहू विधी ही इतर विधीच्या मानाने अतिशय सोपी असली व सराव असणारा सांख्यिक बरेच वेळा गणितीय समीकारांऐवजी तिचा उपयोग करीत असला तरी त्याकरिता दीर्घ अशा अनुभवाची आवश्यकता असते. त्यामुळे तिचा उपयोग नवशिक्यांस योग्य नाहीं.

२. अर्ध–माध्य : ह्या विधीप्रमाणे संपूर्ण न्यास दोन समान भागांत विभजित करावा. प्रत्येक भागाकरिता एक माध्य शोधून काढा. हा माध्य त्या कालखंडाच्या मध्यभागी चित्रित अथवा प्रांकित करून त्या दोन्ही बिन्दूतून जाणारी एक सरळ रेषा काढा. (आकृति १८)



आकृती १८ : १९१४ ते १९३१ दरम्यान संयुक्त संस्थानातील
सिगारेटचा खप = (अर्ध–माध्य रेषेद्वारा प्रवृत्तिदर्शन.)

आकृती १८ मध्ये ३८·२५ व ९५·४५ हे दोन बिन्दू १९१४ ते १९२२ व १९२३ ते १९३१ ह्या दोन कालखंडाच्या मध्यभागी म्हणजे १९१८ व १९२७ वर प्रांकित केले; व मग त्या दोन्ही बिंदूतून जाणारी 'अब' ही सरळ रेषा पट्टीने काढली.

ही रीती अत्यंत सोपी असून तीत वैयक्तिक मतप्रणालीचा अंशही नसतो. परंतु सदर रीतीत उपयोगात येणारे समान्तर–मध्यक हे माध्य न्यासातील चरम पद–अर्हांमुळे विरूपित होणारे असल्याने संप आदीसारख्या अनैसर्गिक कारणाने उद्भवणाऱ्या समसंभावी विचरणातील वरील रीतीने प्राप्त होणारी प्रवृत्ति–रेषा असत्य भासण्याचा संभव आहे. त्याप्रमाणे ही रीती फक्त सरलरेखीय प्रवृत्ती-दर्शनार्थच उपयोगात येऊ शकते.

सारणी–१०

प्रवृत्तीचे–संगणन (अर्ध–माध्य विधी)

१९१४–१९३१ ह्या कालखंडातील यू. एस. ए. मध्ये झालेला सिगारेटचा खप

वर्ष :	खप (कोटीत)	योग	समान्तर–मध्यक
१९१४	१६.८६		
१९१५	१७.९६		
१९१६	२५.२९		
१९१७	३५.३३		
१९१८	४६.६६	३४४.२८ ÷ ९ =	३८.२५
१९१९	५३.१२		
१९२०	४४.६२		
१९२१	५०.८७		
१९२२	५३.५७		
१९२३	६४.४५		
१९२४	७०.०१		
१९२५	७९.९६		
१९२६	८९.४५		
१९२७	९७.१८	८५९.०८ ÷ ९ =	९५.४५
१९२८	१०५.९२		
१९२९	११९.०४		
१९३०	११९.६२		
१९३१	११३.४५		

३. चलिष्णु–माध्य : न्यासातील प्रवृत्तीचे विवरण न्यासातील उच्चावचनांना चलिष्णु–माध्यद्वारा सरलित केल्यास शक्य आहे. चलिष्णु–माध्य हा सम अथवा विषम पदांचा असू शकतो. तीन पदांचा चलिष्णु माध्य कसा काढावा हे खालील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल.

पद–अर्हा १	३–पदांचा चलिष्णुयोग २	३–पदांचा चलिष्णु–माध्य ३
३		
५	१५	५·००
७	२२	७·३३
१०	२९	९·६७
१२	३६	१२·००
१४	४१	१३·६७
१५	४६	१५·३३
१७		

स्तंभ एकमध्ये पद–श्रेणी दिली आहे. स्तंभ २ मधून तीन-तीन पदांचा योग दिला आहे. स्तंभ १ मधील पहिल्या तीन पदांचा योग (३+५+७) = १५ होतो. हा योग श्रेणीतील दुसऱ्या पदासमोर लिहिला. त्यानंतर श्रेणीतील पहिले पद (३) हे गाळून, पुढील तीन पदांचा योग (५+७+१०) = २२ हा त्या तीन पदांच्या केन्द्रीय भागासमोर, म्हणजे श्रेणीतील ७ ह्या अंकासमोर लिहा, नंतर ५–वगळून पुढील तीन अंकांचा योग (७+१०+१२), त्या तीन पदांच्या केन्द्रस्थानी लिहा. ह्याप्रमाणे श्रेणीतील राहिलेल्या अंकाकरिताही तीन-तीन पदांचे योग तयार करून वरील पद्धतीप्रमाणें स्तंभ २ पूर्ण करा.

स्तंभ २–मधील योगास तिहीने भागून आलेला माध्य स्तंभ ३–मध्ये ज्याचा तो माध्य आहे त्या योगासमोर लिहावा. अशा तऱ्हेने चलिष्णु–माध्य–श्रेणी पूर्ण करावी.

आर्थिक–कालिक श्रेणीत जी उच्चावचने संभवतात ती बऱ्हंशी व्यापार–उदीमातील चक्रिक गतीमुळे असतात. ही चाक्रिक उच्चावचने सर्वथा अथवा आंशिकरीत्या दूर करणे शक्य आहे. त्याकरिता चलिष्णु माध्याचा उपयोग करतात. हे चलिष्णुमाध्य न्यासान्तर्गत असलेल्या चक्रिक उच्चावचनाइतपत लांबीचे, अथवा त्याच्या भागाबरोबर असावे. अशा तऱ्हेने न्यासातील चक्रिक उच्चावचनांचे सरलन होऊन न्यासांतर्गत प्रवृत्तीचे मापन शक्य होते.

सारणी ११ मधील न्यास उपयोगात आणून चलिष्णु–माध्यद्वारा त्या न्यासातील प्रवृत्ति–अर्हा कशा काढायच्या हे विषम–पदाकारिता सारणी ११ व सम–पदांकारिता सारणी १२ मध्ये दाखविले आहे. सारणी ११ मध्ये सात–पदांचा चलिष्णु–माध्य दिला असून सारणी १२मध्ये सहा पदांचा चलिष्णु माध्य दिला आहे.

सारणी–११

प्रवृत्ति–दिग्दर्शनार्थ संगणना.

(चलिष्णु–माध्य–विधिद्वारा.)

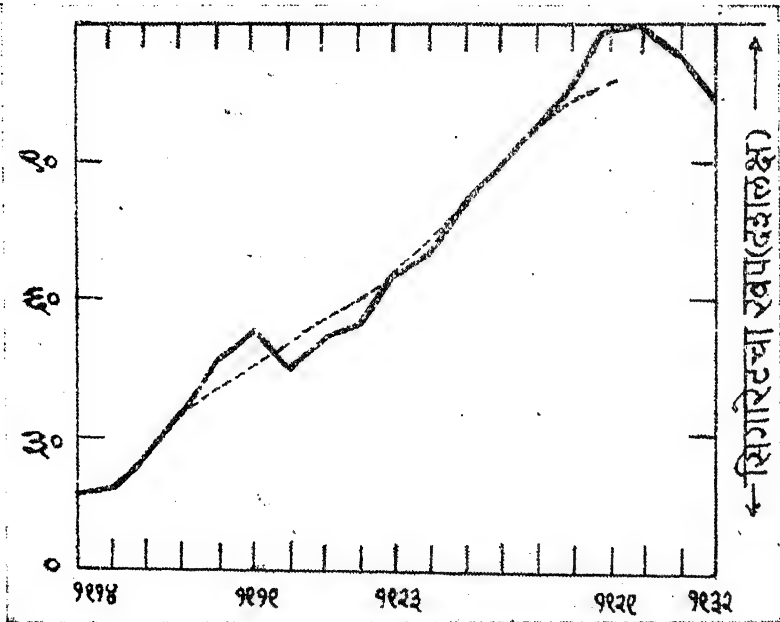
१९१४ ते १९३२ या कालखंडात अमेरिकेत झालेला सिगारेटचा खप

वर्ष (१)	खप कोटीत (२)	चालिष्णु–योग ७–पदांचा (३)	चलिष्णु–माध्य ७–पदांचा (४)
१९१४	१६·८६		
१९१५	१७·९६		
१९१६	२५·२९		
१९१७	३५·३३	२३९·८४	३४·२६
१९१८	४६·६६	२७३·८५	३९·१२
१९१९	५३·१२	३०९·४६	४४·२१
१९२०	४४·६२	३४८·६२	४९·८०
१९२१	५०·८७	३८३·३०	५४·७६
१९२२	५३·५७	४१६·६०	५९·५१
१९२३	६४·४५	४५२·९३	६४·७०
१९२४	७०·०१	५०५·४९	७२·२१
१९२५	७९·९६	५६०·५४	८०·०८
१९२६	८९·४५	६२६·०१	८९·४३
१९२७	९७·१८	६८१·१८	९७·३१
१९२८	१०५·९२	७२४·६२	१०३·५२
१९२९	११९·०४	७४८·२४	१०६·८९
१९३०	११९·६१		
१९३१	११३·४५		
१९३२	१०३·५८		

(संयुक्त संस्थानांच्या वाणिज्य–विभागावरून)

वरील सारणीत ७ पदांचा योग व त्यांचाच चलिष्णु–माध्य कसा द्यायचा हे पूर्वी ३–पदांचा योग व ३–पदांचा चलिष्णु माध्य कसा काढायचा ह्याचे जे वर्णन दिले त्याबरहुकूम असावा.

परन्तु समपदांचा योग व माध्य काढताना तो योग व माध्य कोणत्या पदांसमोर केन्द्रित करावा हा प्रश्न पडतो. अशा वेळेस तो योग व माध्य दोन पदांच्या मध्येच केन्द्रित करणे योग्य ठरेल. उदाहरणार्थ : सारणी १२ मध्ये पहिल्या ६ पदांचा योग घेतल्यावर तो १९१६ व १९१७ च्या मध्येच केन्द्रित करावयास हवा. अशा तऱ्हेने संपूर्ण श्रेणीकरिता ६–पदांचा योग घेऊन झाल्यावर त्या योगाचा ६–पदांचा चलिष्णु-माध्य घ्यावा. व मग पुन्हा दोन-दोन पदांचा योग घेऊन त्याचा माध्य केन्द्रित करावा.



आकृती १९ : १९१४ ते १९३२ या कालखंडातील संयुक्त संस्थानातील सिगारेटचा खप : सहा वर्षीय चलिष्णु–माध्यद्वारा प्रवृत्तिदर्शन.

सारणी–१२

प्रवृत्ति–दिग्दर्शनार्थ–संगणना.

(चलिष्णु–माध्य–विधी)

सम–वर्षीय कालखंड

१९१४ ते १९३२ ह्या कालखंडात अमेरिकेमध्ये झालेला सिगारेटचा खप

वर्ष	खप कोटीत	६ वर्षीय चलिष्णु योग	६ वर्षीय चलिष्णु माध्य	२ वर्षीय चलिष्णु–योग स्तंभ ४ चा	६ वर्षीय चलिष्णु-माध्य (केन्द्रित)
(१)	(२)	(३)	(४)	(५)	(६)
१९१४	१६.८६				
१९१५	१७.९६				
१९१६	२५.२९	१९५.२२	३२.५४		
१९१७	३५.३३	२२२.९८	३७.१६	६९.७०	३४.८५
१९१८	४६.६६	२५५.८९	४२.६५	७९.८१	३९.९१
१९१९	५३.१२	२८४.१७	४७.३६	९०.०१	४५.०५
१९२०	४४.६२	३१३.२९	५२.२२	९९.५८	४९.७९
१९२१	५०.८७	३३६.६४	५६.११	१०८.३३	५४.१७
१९२२	५३.५७	३६३.४८	६०.५८	११६.६९	५८.३५
१९२३	६४.४५	४०८.३१	६८.०५	१२८.६३	६४.३२
१९२४	७०.०१	४५४.६२	७५.७७	१४३.८२	७१.९१
१९२५	७९.९६	५०६.९७	८४.५०	१६०.२७	८०.११
१९२६	८९.४५	५६१.५६	९३.५९	१७८.०९	८९.०५
१९२७	९७.१८	६११.१७	१०१.८६	१९५.४५	९७.७२
१९२८	१०५.९२	६४४.६६	१०७.४४	२०९.३०	१०४.६५
१९२९	११९.०४	६५८.८९	१०९.८०	२१७.२४	१०८.६२
१९३०	११९.६२				
१९३१	११३.४५				
१९३२	१०३.५८				

आकृती १९ मध्ये सारणी १२ तील ६–पदांच्या चलिष्णु–माध्यद्वारा प्राप्त प्रवृत्ति–रेखा दिग्दर्शित केली आहे—

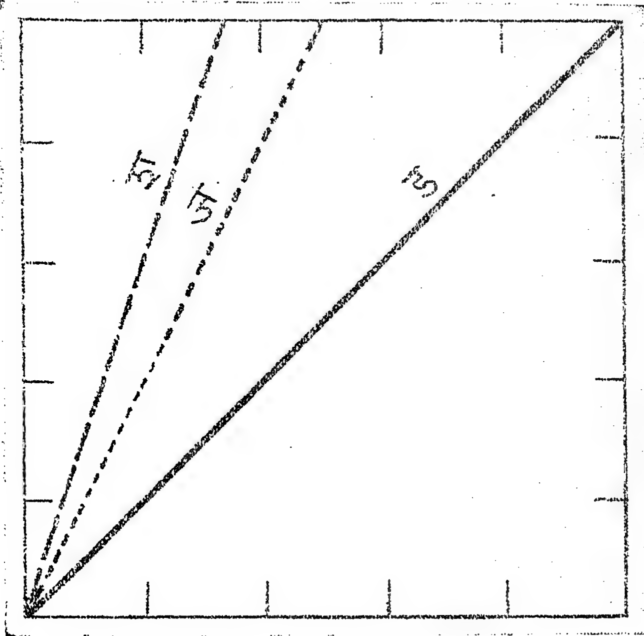
प्रकरण ६

कालिक-श्रेणी-विश्लेषण : प्रवृत्ति-दर्शन

अल्प-तम वर्गरीती सरलरेखीय

कोणत्याही ग्राफमधील प्रांकित रेषेचे सूत्र त्या चित्रांकणाच्या निव्वळ ाहणीवरून तयार करिता येते.

आकृती २० मधील ‘ड’–या रेषेचे सूत्र त्या रेषेने दर्शित ‘थ’ व ‘र’



आकृती २०

च्या अर्हेवरून काढता येईल. ‘ज’ व ‘श’ ह्या रेषांची सूत्रेही वरीलप्रमाणेच प्राप्त होऊ शकतात.

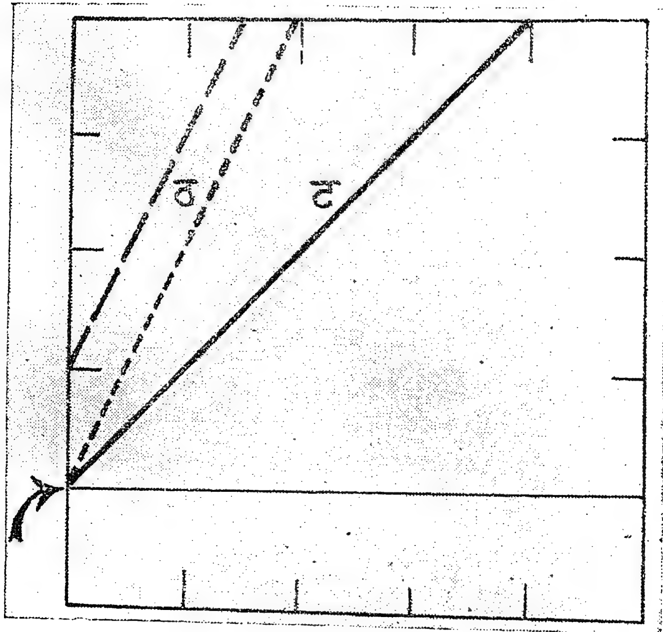
रेषा ‘ज’ : र = २य.

रेषा ‘श’ : र = ३य.

वरील समीकारात 'य'–ची अर्हा एका एककाने वाढली तर 'र' ची अर्हा किती एककाने वाढवावी हे 'य' च्या मापांकावरून स्पष्ट होते. संदर्भार्थ सदर मापांकाकरिता 'ख' हे अक्षर वापरतात. तेव्हा वरील तऱ्हेने समीकार सर्वसाधारण स्वरूपात खालीलप्रमाणे लिहिणे शक्य आहे.

र = ख·य

'ख' ह्या गुणकाची–अर्हा ज्या प्रमाणात वाढते, त्याच प्रमाणात रेषेचा चढही वाढतो. त्यामुळे असे म्हणता येईल की 'ख' ह्या अर्हेने सदर समीकारात रेषेचा उतार दाखविला जातो. रेषेची ही वृत्ति अधोमुख (अवरोही अथवा खाली उतरणारी) असेल तर 'ख'–ची अर्हा ऋण असते. म्हणजे 'य' मध्ये एक युनिट वाढ झाली तर त्याच प्रमाणात 'र' खाली घसरतो.



आकृती २१

आकृती २१ मधील 'ट'–रेषेकरिता 'य' व 'र' च्या अर्हा निरनिराळ्या घेतल्यास खालीलप्रमाणे परिणाम संभवतात.

य...	र...
०	१
१	२
२	३
३	४
४	५

'य –मध्ये एक–एककाची वृद्धी झाल्यास 'र' ची अर्हाही एकाच एककाने वृद्धिंगत होते. त्यामुळे 'ख' ची अर्हा एकच समजावी. ह्यावरून लक्ष्यात येईल की 'र'–अर्हा ही सतत 'य'–अर्हेपेक्षा एकाच–एककाने अधिक आहे; व त्यामुळे सदर रेषा प्रवृत्ती खालील समीकारद्वारा दर्शित होते.

र = १ + १य·

त्याचप्रमाणे, 'ठ'–ह्या रेषेकरिता हा समीकार असा:

र = १ + २य·

कारण 'य'–च्या शून्य अर्हेबरोबर 'र' ची अर्हा एक एकक असूनही य–मध्ये जर एक–एककाची वाढ झाली तर 'र'–मध्ये दोन एककाची वृद्धी होते. म्हणजेच य–अर्हा शून्य असताना 'र'–अथवा उदग्र–अक्षावर जेथे ही रेषा काट मारते तितकी ह्या नवीन अचलाची अर्हा असते. 'ट' व 'ठ' ह्या रेषे-करिता हा बिन्दू आकृती २१ मध्ये बाणाने दाखविला आहे.

वरील समीकारातील एक–ह्या नवीन अचलाकरिता 'क'–हे आद्याक्षर वापरतात. मग वरील समीकार आद्याक्षरात खालीलप्रमाणे दर्शित होईल.

र = क + ख·य (१९)

अल्पतम वर्गरीती :

दिलेल्या न्यासात सरल रेखीय प्रवृत्तीची कल्पना गृहीत धरल्यास खालील समीकाराने न्यासातील ही प्रवृत्ती दर्शित होऊ शकेल.

र = क + ख. य.

अर्थात ह्या समीकारांतील 'क' व 'ख' च्या अर्हा मात्र निश्चित करावयास हव्या.

र = क + ख. य ह्या समीकाराने अनंत अशा सरल–रेषा दर्शित होतात. त्यामुळे दिलेल्या न्यासाकरिता कोणत्या एका विशिष्ट सरल-रेषेचे अन्वायोजन उत्तम आहे हे निश्चित करणे क्रमप्राप्त ठरते. अल्पतम वर्गरीतीने हे सरल रेषा आहे. ह्या

तत्त्वानुसार अनेक रेषांपैकी ती रेषा उत्तम अन्वायुक्त मानण्यात येते की जिच्या विचलनांच्या वर्गांचा योग अल्पतम असतो. विचलनाच्या वर्गांचा योग अल्पतम असू शकणारी रेषा ह्या अनेक रेषांत फक्त एकच असते.

ह्या रेषेस **अल्पतम–वर्गरेषा** असे म्हणतात.

दिलेल्या श्रेणीकरिता अशा तऱ्हेची ही अल्पतम वर्गरेषा प्रसामान्य समीकाराच्या संचातून निवडून काढणे शक्य आहे. हे प्रसामान्य–समीकार गणितीय विधिद्वारा व्युत्पादित होतात; परंतु नेहमीच्या कामकाजास्तव ते खालीलप्रमाणे गुणन–फल विधिद्वारा व्युत्पादित करण्यात येतात.

ही गुणन–फल–रीती अशी : " र = क + ख. य "–ह्या समीकारास 'क' व 'ख' ह्या अज्ञात–राशीच्या गुणकाने गुणावे. 'क' ह्या अज्ञात–राशीचा गुणक एक आहे, व ह्या गुणकाने सदर समीकारास गुणल्यास गुणन–फल र = क + ख. य असेच येते.

न्यासातील सर्व पद–अर्हांच्या बिन्दूकरिता सदर समीकार आकलित केल्यास येणारे आकलन खालीलप्रमाणे होय.

(१) धी (र) = धी. क + ख. धी (य)

परंतु **धी. क = डा. क** (२०)

म्हणून वरील समीकार (१) चे रूप असे:—

(१) धी (र) = डा क + ख. धी (य).

'ख' ह्या अज्ञात राशीचा गुणक 'य' आहे. सदर प्रसामान्य समीकारास 'य' ह्या गुणकाने गुणल्यास प्राप्त होणारा परिणाम असा :

$$\text{य. र = क. य + ख. य}^2 \qquad (२१)$$

न्यासातील सर्व पद–अर्हांच्या बिन्दूकरिता वरील समीकार आकलित केल्यास प्राप्त होणारे आकलन येणेप्रमाणे :—

$$\text{(२) धी (रय) = क. धी (य) + ख. धी (य}^2\text{)} \qquad (२२)$$

वरील दोन समीकारांच्या साहाय्याने दोन्ही अज्ञात अर्हा काढता येतील. प्रवृत्ति–रेषेचेही अन्वायोजन त्यामुळे सहज शक्य आहे.

अल्पतम–वर्गरीती प्रयोग :

सारणी १३ मध्ये दिलेल्या न्यासाधारे हा अल्पतम–वर्गरीतीचा प्रयोग सिद्ध करण्यात येत आहे. दिलेल्या न्यासात सरल–रेखीय प्रवृत्ती आहे असे गृहीत धरल्यास

र = क + ख.य

हा समीकार सोडवावयास हवा. त्याकरिता खालील दोन प्रसामान्य समीकारांचे साहाय्य हवे.

(१) धी (र) = डा. क + ख. धी (य) (२३)

(२) धी (यर) = क. धी (य) + ख. धी ($य^२$) (२४)

वरील समीकार सोडविण्यासाठी खालील अर्हांचे संगणन आवश्यक आहे. धी (य), धी (र), धी (य·र), धी ($य^२$), डा.

अशा कृत्यांतून 'काल' हा नेहमी य–अक्षावर चित्रांकित होतो म्हणून त्यास य–चल असे म्हणतात. उत्पादन नेहमी र–अक्षावर दर्शविले जाते; व म्हणून त्यास र–चल असे म्हणतात.

सारणी १३ तून दिलेला कालखंड १९१६–१९१७ वगैरे संगणनेच्या दृष्टीने क्लिष्ट असल्याने स्तंभ २ मधून दिल्याप्रमाणे त्यास पुन्हा सर्वसाधारण क्रमांक द्यावे. असे करताना त्या कालखंडाचे जे मूळ वर्ष असेल त्यास शून्य हा क्रमांक द्यावा. दोन्ही श्रेणींतील संवादित्व मग ह्या शून्याने सिद्ध होते.

वरील प्रसामान्य–समीकार सोडविण्याकरिता आवश्यक अशा अर्हा सारणी १३ वरून प्राप्त होतात, त्या अशा :

डा = १५

धी (य) = १०५, धी (र) = २१८६·३

धी (यर) = १७३२८·४, धी ($य^२$) = १०१५

ह्या अर्हा वरील प्रसामान्य–समीकारात सामाविष्ट केल्यास येणारे रूपक खालीलप्रमाणे :

(१) २१८६·३ = १५ क + १०५ ख.

(२) १७३२८·४ = १०५ क + १०१५ ख.

समयामिक विधीने हे समीकार सोडविल्यास येणाऱ्या 'क' व 'ख' च्या अर्हा अशा :

क = ९५·१४

ख = ७·२३

सर्वसाधारण समीकारात ह्या अर्हा प्रविष्ट केल्यास प्रवृत्ति–दिग्दर्शक रेषा जी प्राप्त होते ती अशी : र = ९५·१४ + ७·२३ य

ह्या समीकाराचा अर्थ लावताना कालखंडाचे मूळ व संगणनेत उपयोगात आणलेल्या एककाचा निर्देश अत्यावश्यक होय.

वरील समीकार अंतिम रीत्या असा वाचावा.

"१९१६ ते १९३० ह्या कालखंडातील यू. एस्. ए. मधील अल्युमिनियमच्या वार्षिक उत्पादनातील प्रवृत्ती र = ९५·१४ + ७·२३ य अशी आहे. ह्या कालखंडाचा मूलबिन्दू १९१६ हे वर्ष असून संगणना दशलक्ष पौंडात आहे."

सारणी–१३

प्रवृत्ति–दिग्दर्शनार्थ–संगणना.

अल्पतम–वर्गरीतीप्रमाणे

यू. एस. ए. तील १९१६ ते १९३० कालखंडातील अल्युमिनियमचे वार्षिक उत्पादन.

वर्ष (१)	य (२)	उत्पादन (दशलक्ष पौंडात) र (३)	यर (४)	य² (५)
१९१६	०	११०·२	०	०
१९१७	१	१४३·३	१४३·३	१
१९१८	२	१४३·३	२८६·६	४
१९१९	३	१३४·५	४०३·५	९
१९२०	४	१३८·०	५५२·०	१६
१९२१	५	५५·०	२७५·०	२५
१९२२	६	७४·०	४४४·०	३६
१९२३	७	१२९·०	९०३·०	४९
१९२४	८	१५०·०	१२००·०	६४
१९२५	९	१४०·०	१२६०·०	८१
१९२६	१०	१४५·०	१४५०·०	१००
१९२७	११	१६०·०	१७६०·०	१२१
१९२८	१२	२१०·०	२५२०·०	१४४
१९२९	१३	२२५·०	२९२५·०	१६९
१९३०	१४	२२९·०	३२०६·०	१९६
	१०५	२१८६·३	१७३२८·४	१०१५

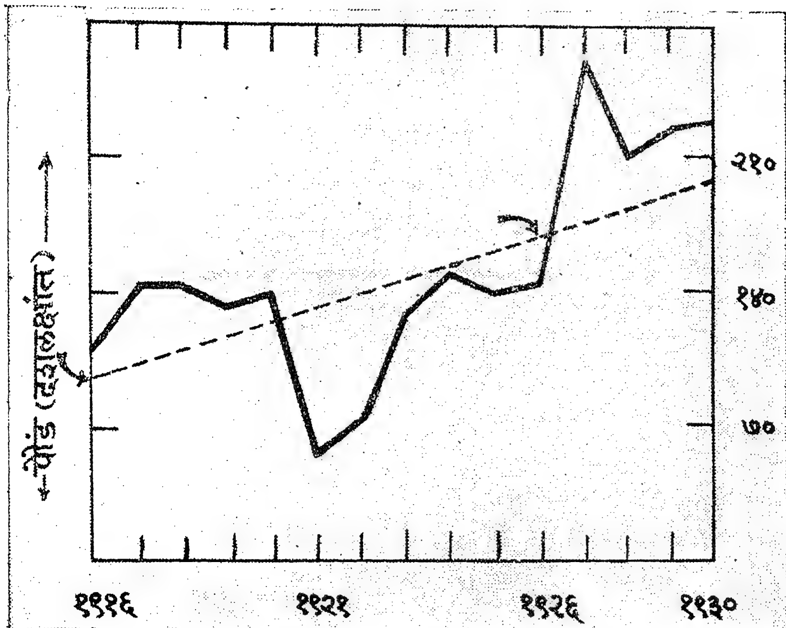
सारणी १३ तील न्यासाकरिता वरील प्रवृत्ति–रेषा प्रांकित करावयाची असल्यास 'र' च्या क्रमिक अर्हा संगणित करावयास हव्या. १९१८ ह्या वर्षा–

करिता सारणीतील य–ची अर्हा दोन आहे. ही अर्हा आलेल्या प्रवृत्ति–रेषेच्या समीकारात समाविष्ट केल्यास १९१८ करिता येणारी र–अर्हा अशी :

$$र = ९५{\cdot}१४ + ७{\cdot}२३\ (२)$$
$$= ९५{\cdot}१४ + १४{\cdot}४६$$
$$= १०९{\cdot}६०$$

अशा तऱ्हेने इतर वर्षांकरिताही र–च्या अर्हा काढता येतील. कोणतेही दोन बिन्दू सांधल्यास सरळ रेषा येते. म्हणून कोणत्याही दोन वर्षांच्या र–अर्हा प्रांकित करून त्या सांधल्यास यू.एस्.ए. तील १९१६ ते १९३० ह्या कालखंडातील अल्युमिनियम उत्पादनाची प्रवृत्ति–रेषा प्राप्त होईल.

आकृती २२ मध्ये १९१६ ते १९३० ह्या कालखंडातील संयुक्त संस्थानचे अल्युमिनियमचे वार्षिक उत्पादन आणि अल्पतमवर्ग रीतीप्रमाणे प्राप्त सरल–रेखीय प्रवृत्ति–रेषा देण्यात आली आहे.



आकृती २२ : १९१६ ते १९३८ कालखंडांतील अल्युमिनियमचे वार्षिक उत्पादनः–अल्पतमवर्ग रीतीद्वारा प्राप्त प्रवृत्ति–रेषेसह.

प्रवृत्ति-रेषा संगणनार्थ लघु-रीती:

प्रवृत्ति-संगणनेत विषम-वर्षांचा उपयोग केल्यास सारणी १३ मधील गणना अधिक सुगम होऊ शकते. दिलेल्या कालखंडातील मधले वर्ष मध्यका मानून त्यास शून्य ही य-अर्हा द्यावी. त्यापूर्वीच्या वर्षांना ऋण व त्यानंतरच्या वर्षांना अधिक समजून वरीलप्रमाणे गणना पूर्ण करावी. सारणी १३ मधील न्यासाकरिता लघु-रीतीने संगणना कशी पूर्ण करावयाची हे सारणी १४ मध्ये दाखविले आहे. ह्या रीतीप्रमाणे धी (य) ची योग-अर्हा शून्य असते. हे सारणी १४ स्तंभ २ वरून कळून येईल. अर्थात मग अल्पतमवर्ग रीतीतले दोन्ही प्रसामान्य-समीकाराचे रूप खालीलप्रमाणे उरते.

(१) धी (र) = डा·क (२५)

(२) धी (रय) = ख·धी ($य^2$) (२६)

सारणी-१४

प्रवृत्ति-दिग्दर्शनार्थ संगणना.

अल्पतमवर्ग रीतीप्रमाणे: विषम-वर्षीय लघु-रीतीने.

१९१६ ते १९३० दरम्यान युनायटेड-स्टेट्समधून उत्पादित अल्युमिनियम.

वर्ष (१)	य (२)	र (३)	यर (४)	$य^2$ (५)
१९१६	−७	११०·२	−७७१·४	४९
१९१७	−६	१४३·३	−८५९·८	३६
१९१८	−५	१४३·३	−७१६·५	२५
१९१९	−४	१३४·५	−५३८·०	१६
१९२०	−३	१३८·०	−४१४·०	९
१९२१	−२	५५·०	−११०·०	४
१९२२	−१	७४·०	− ७४·०	१
१९२३	०	१२९·०	०	०
१९२४	+१	१५०·०	१५०·०	१
१९२५	+२	१४०·०	२८०·०	४
१९२६	+३	१४५·०	४३५·०	९
१९२७	+४	१६०·०	६४०·०	१६
१९२८	+५	२१०·०	१०५०·०	२५
१९२९	+६	२२५·०	१३५०·०	३६
१९३०	+७	२२९·०	१६०३·०	४९
	०	२१८६·३	२०२४·३	२८०

आलेल्या अर्हा प्रसामान्य–समीकारांतून समाविष्ट केल्यास,

(१) २११८६·३ = १५ क

(२) २०२४·३ = २८० ख

हे रूप येते. म्हणजे क = १४५·७५

व ख = ७·२३ अशा अर्हा येतात.

प्रवृत्ति–दिग्दर्शनार्थ प्राप्त समीकार यामुळे असा :

" १९१६ ते १९३० या कालखंडातील युनायटेड–स्टेट्स मधील अल्युमिनियमच्या वार्षिक उत्पादनातील प्रवृत्ती र = १४५·५६+७·२३ य अशी आहे. ह्या कालखंडाचा मूल–बिन्दू १९२३ हे वर्ष असून संगणना दशलक्ष पौंडातील होय. "

एकाच तऱ्हेच्या न्यासाकरिता वर दिलेल्या संगणना रीतीप्रमाणे दोन निरनिराळ्या प्रवृत्ति–रेषा प्राप्त होतात. अर्थात हे सर्वच चूक आहे, असा प्रथम–दर्शनी ग्रह होण्याचा संभव आहे. खरे पाहिले असता दोन्ही रेषा एकच आहेत. पहिल्या रीतीत १९१६ हा मूलबिन्दू आहे, तर दुसऱ्या रीतीत १९२३ हा मूलबिन्दू आहे. पहिल्या रीतीच्या अनुषंगाने १९२३ हे वर्ष ७ व्या क्रमांकावर येते. तेव्हा य–करिता ७ ही अर्हा पहिल्या प्रवृत्ति–रेषेत ऐवजी धरल्यास र = १४५·७५ येतात.

र = ९५·१४ + ७·२३ × ७

= १४५·७५

म्हणजेच दोन्ही प्रवृत्ति–रेषा संपूर्णपणे संवादी होत.

कालिक–श्रेणी–विश्लेषण : अ–रेखीय प्रवृत्ती

न्यासातील आरोही–वृत्तीचा अर्ध जेव्हा सारखा बदलत असतो, तेव्हा त्या न्यासातील प्रवृत्ती सरल–रेषेने दर्शित होत नाही. एकेन्द्र, अधीन्द्र वगैरेसारख्या अरेखीय वक्राने अशी प्रवृत्ती अधिक सयुक्तिकपणे दिग्दर्शित होते. कोणत्याही न्यासातील अशा प्रकारच्या अरेखीय प्रवृत्तीचे दर्शन सर्वांत सोपे व सुगम असे एकेन्द्र वक्रद्वारे होते. हे एकेन्द्र खालील सर्वसाधारण सूत्राने दर्शित होते—

$$र = क + ख. य + ग. य^2 \qquad (२७)$$

ह्या वक्राचे अन्वायोजनही मागच्या प्रकरणात वर्णन केलेल्या रीतीने होते. फरक फक्त अज्ञात अचलांच्या संख्येत आहे. वरील समीकारात तीन अज्ञात अचल आहेत. म्हणून तीन प्रसामान्य समीकारांची आवश्यकता आहे.

वरील सामान्य समीकारांस, आधीच्या प्रकरणात वर्णन केल्याप्रमाणे दरवेळेस एकाच अज्ञात अचलाने गुणल्यास येणारे तीन प्रसामान्य समीकार असे :—

$$(१)\ धी(र) = डा. क + ख. धी(य) + ग. धी(य^2) \qquad (२८)$$

$$(२)\ धी(यर) = क. धी(य) + ख. धी(य^2) + ग. धी(य^3) \qquad (२९)$$

$$(३)\ धी(य^2. र) = क. धी(य^2) + ख. धी(य^3) + ग. धी(य^4) \qquad (३०)$$

हे समीकार सोडविण्याकरिता खालील अर्हांची दिलेल्या न्यासावरून संगणना करावयास हवी.

धी (य), धी (र), धी (य. र) धी ($य^2$)
धी ($र^2$) धी ($य^2$. र) व डा. आणि
धी ($य^3$), व धी ($य^4$).

संगणित अशा ह्या अर्हा मग वरील तीन्ही समीकारात समाविष्ट करून समयामिक रीतीने हे समीकार सोडविल्यास क, ख व ग ह्या अज्ञात–अचलांच्या अर्हा प्राप्त होतात.

व्यवहारात ही रीती कशी उपयोगात आणावयाची हे सारणी १५ वरून लक्षात येईल.

सारणी–१५.

प्रवृत्ति–दिग्दर्शनार्थ संगणना.

अल्पतम वर्गरीती : द्वि–मात्रा–घात वक्र (एकेन्द्र)

१९१५ ते १९३० दरम्यान अमेरिकेतून झालेली गॅसोलीनची निर्यात.

वर्ष (१)	य (२)	निर्यात (दशलक्ष र–पिंपात) (३)	यर (४)	य² (५)	य². र (६)	य³ (७)	य⁴ (८)
१९१५	०	२·७	०	०	०	०	०
१९१६	१	८·५	८·५	१	८·५	१	१
१९१७	२	९·९	१९·८	४	३९·६	८	१६
१९१८	३	१३·३	३३·९	९	११९·७	२७	८१
१९१९	४	८·९	३५·६	१६	१४२·४	६४	२५६
१९२०	५	१५·३	७६·५	२५	३८२·५	१२५	६२५
१९२१	६	१२·७	७६·२	३६	४५७·२	२१६	१२९५
१९२२	७	१३·८	९६·६	४९	६७६·२	३४३	२४०१
१९२३	८	२०·१	१६०·८	६४	१२८६.४	५१२	४०९६
१९२४	९	२८·३	२५४·७	८१	२२९२·३	७२९	६५६१
१९२५	१०	३०·६	३०६·०	१००	३०६०·०	१०००	१००००
१९२६	११	४२.५	४६७·५	१२१	५१४२·५	१३३१	१४६४१
१९२७	१२	४४·३	५३१·६	१४४	६३७९·२	१७२८	२०७३६
१९२८	१३	५२·९	६८७·७	१६९	८९४०·१	२१९७	२८५६१
१९२९	१४	६२·१	८६९·४	१९६	१२१७१·६	२७४४	३८४१६
१९३०	१५	६५·६	९८४·०	२२५	१४७६०·०	३३७५	५०६२५
	१२०,	४३१·५	४६१४·८,	१२४०,	५५८५८·२,	१४४००,	१७८३१२

(संयुक्त संस्थानचा खाणी विभाग.)

वरील सारणीद्वारा प्राप्त–अर्हा प्रथम, द्वितीय व तृतीय प्रसामान्य–समीकारात समाविष्ट केल्यास जो निष्कर्ष येतो तो असा—

(१) ४३१·५ = १६क + १२०ख + १२४०ग.

(२) ४६१४·८ = १२०क + १२४० ख + १४४००ग

(३) ५५८५८·२ = १२४०क + १४४००ख + १७८३१२ग.

क, ख व ग ह्या अज्ञात–अचलांच्या अर्हा मिळविण्यासाठी समयामिक समीकार रीतीने (१) व (२) नंतर (३) व (१) हे समीकार सोडवून ती सरतेशेवटी ह्या द्वंद्वामुळे प्राप्त समीकार सोडविल्यास ‘ ग ’ ची अर्हा प्राप्त होते. जसें—

(२) ४६१४·८ = १२० क + १२४० ख + १४४०० ग
(१) ३२३६·३० = १२० क + ९०० ख + ९३०० ग (७·५ ने गुणून)

१३७८·५ = ३४० ख + ५१०० ग (४)

(३) ५५८६८·२ = १२४० क + १४४०० ख + १७८३१२ ग
(१) ३३४४१·३ = १२४० क + ९३०० ख + ९६१०० ग (७७·५ ने गुणून)

२२४१६·९ = ५१०० ख + ८२२१२ ग (५)

(५) २२४१६·९ = ५१०० ख + ८२२१२ ग
(४) २०६७८·३ = ५१०० ख + ७६५०० ग (१५ ने गुणून)

१७३८·७ = ५७१२ ग

∴ ग = ०·३०४४

आलेली ही ‘ ग ’ ची अर्हा समीकार (४) मध्ये समाविष्ट केल्यास :

१३७८·५ = ३४० ख + ५१०० × ०·३०४४
= ३४० ख + १५५२·४४

∴ ख = – ०·५११४

सरतेशेवटी, ख व ग च्या अर्हा (१) समीकारात ठेवून ‘ क ’–ची अर्हा येईल : ४६१४·८ = १२० क + १२४० (–०·५११४)
+ १४४०० (०·३०४४)

८६५·५७६ = १२० क.

∴ क = ७·२१३१.

त्यामुळे अंतिम प्रवृत्ति–समीकार असा :

“ १९१५ ते १९३० कालखंडाकरिता अमेरिकेत होणाऱ्या गॅसोलीनची निर्यात प्रवृत्ती......

र = ७·२१३१ – ०·५११४ य + ०·३०४४ य^2 अशी आहे. मूळ वर्ष १९१५ व संगणना दश–लक्ष पिंपात आहे. ”

वरील प्रवृत्ति–समीकारावरून १९१५ ते १९३० या कालखंडातील प्रत्येक वर्षाकरिता गॅसोलीन निर्यातीची प्रवृत्ति–अर्हा किती होती हे काढावे. व मग प्रवृत्ति

अर्हा व सत्य–अर्हांचे संवादित्व तपासून पहावे. उदाहरणार्थ : १९२५ हे वर्ष त्या कालखंडातील दहावे वर्ष होय. म्हणजे य = १० असे मानल्यास, १९२५ करिता निर्यातीची प्रवृत्ति–अर्हा येते ती अशी :

$$र = ७·२१३१ + (- ·५११४ \times १०) + ·३०४४ \times १०^{२}$$
$$= ३२·५३९१ \text{ दशलक्ष पिंप.}$$

प्रत्यक्षात ३०·६ दशलक्ष पिंप एवढेच गॅसोलीन १९२५ साली निर्यात झाले !

सारणी–१६

१९१५ ते १९३० दरम्यान अमेरिकेतून निर्यात होणारे गॅसोलीन
(अवलोकन–अर्हा, प्रवृत्ती–अर्हा व प्रवृत्तीचे–विचलन.)

वर्ष १	निर्यात २	प्रवृत्ति–अर्हा ३	विचलन ४
१९१५	२·७	७·२१३१	−४·५
१९१६	८·१	७·००६१	+१·५
१९१७	९·९	७·४०७९	+२·५
१९१८	१३·३	८·४१८५	+४·९
१९१९	८·९	१०·०३७९	−१·१
१९२०	१५·३	१२·२६६१	+३·०
१९२१	१२·७	१५·१०३१	−२·४
१९२२	१३·८	१८·५४८९	−४·७
१९२३	२०·१	२२·६०३५	−२·५
१९२४	२८·३	२७·२६०९	+१·०
१९२५	३०·६	३२·५३९१	−१·९
१९२६	४२·५	३८·४२०१	+४·१
१९२७	४४·३	४४·९०९९	−०·६
१९२८	५२·९	५२·००८५	+०·९
१९२९	६२·१	५९·७१५९	+२·४
१९३०	६५·६	६८·०३२१	−२·४
			+०·२

म्हणजे : विचलनांचा योग शून्य आहे...अर्थात् प्रवृत्ति–दिग्दर्शक समीकार संपूर्णपणे मूळ न्यासाशी संवादी समजावा.

पूर्वीच्या प्रकरणातून वर्णन केल्याप्रमाणे वर उद्धृत केलेली रीती ' विषम–वर्षे ' हे माप वापरून एकेन्द्राकरिताही अधिक सुगम करता येईल. असे केल्यास धि (य) व धि (य³) ह्या अर्हा शून्य होतात. त्यामुळे वरील तिन्ही प्रसामान्य समीकारांचे खालीलप्रमाणे रूपांतर होते.

$$(१)\ \text{धी}(\text{र}) = \text{डा}.\,\text{क} + \text{ग}\cdot\text{धी}(\text{य}^{2}) \qquad (३१)$$

$$(२)\ \text{धी}(\text{य}.\text{र}) = \text{ख}.\,\text{धी}(\text{य}^{2}) \qquad (३२)$$

$$(३)\ \text{धी}(\text{य}^{2}.\text{र}) = \text{क}\cdot\text{धी}(\text{य}^{2}) + \text{ग}.\,\text{धी}(\text{य}^{4}) \qquad (३३)$$

सदर समीकारातून क व ग च्या अर्हा (१) व (३) वरून येतात; तर ख–ची अर्हा एकदमच (२) वरून प्राप्त होते.

अरेखीय प्रवृत्तीकारिता द्वि–मात्रा–घात वक्रापेक्षाही अधिक उत्तम अन्वायुक्त वक्र दोन मात्रांपेक्षा अधिक मात्रांचे एकेन्द्र असू शकते. परंतु अशा तऱ्हेने साधणारे अन्वायोजन एखादवेळेस प्रवृत्ति–दर्शनापेक्षा चक्रिक अथवा आर्त्तव उच्चावचन असण्याचाच संभव जास्त ! अर्थात् जितके अधिक मात्रांचे वक्र असेल तितकेच अरेखीय प्रवृत्तीच्या बाबतीत अन्वायोजनही अधिक उत्तम असेल ! नेहमीच्या काम-काजात मात्र अधिक मात्रा असलेल्या वक्रांची उपयुक्तता विशेष नसते.

दोनांपेक्षा अधिक मात्रा असणाऱ्या **एकेन्द्राचे** सर्वसाधारण सूत्र असे :—

$$\text{र} = \text{क} + \text{ख}.\,\text{य} + \text{ग}.\,\text{य}^{2} + \text{घ}.\,\text{य}^{3} + \ldots\ldots + \text{ड}.\,\frac{\text{ड}}{\text{य}} \qquad (३४$$

घातांक श्रेणी :

कित्येक वेळेस काही श्रेणी अशा असतात की त्यांना सरल–रेषा अथवा **एकेन्द्राचे** अन्वायोजन लागू होत नाही. काही काही श्रेणी अशा असतात की त्यातील प्रवृत्ती गुणोत्तर–श्रेढीने वाढतात. अशा प्रवृत्तींचे दिग्दर्शनार्थ ज्या वक्राचा उपयोग होतो त्याचे सूत्र असे :

$$\text{र} = \text{क}.\,\text{ख}^{\text{य}}$$

अशा तऱ्हेच्या वक्रांतून य–च्या अर्हा साध्या गणितीय श्रेढी प्रमाणात असतात. तर ' र ' च्या अर्हा गुणोत्तर श्रेढी प्रमाणात असतात. अर्ध–छेदा कागदावर त्या प्रांकित केल्या तर येणारी प्रवृत्ति–रेषा ही सरल–रेखीय असते; आणि वक्रास ' अर्ध–छेदा वक्र ' असे म्हणतात.

' य ' व ' र ' अर्हा दोन्ही गुणोत्तर–श्रेढी प्रमाणात असतील, तर येणारे वक्र हे......

$$र = क. य^{ख} \quad (३५)$$

असे असते; व छेदा–कागदावर ह्या न्यासाचे प्रांकण केल्यास येणारे वक्रही सरल–रेखीयच असते.

नेहमीच्या संगणनेसाठी व रोजच्या कामकाजात वरील प्रकारच्या वक्रांचे अन्वायोजन बहुधा छेदात रूपांतरित केल्याने त्वरित होते.

$र = क. ख^{य}$ हे सूत्र छेदात रूपांतरित केल्यास छे. र = छे.क + य. छेख असे होते. पूर्वी वर्णन केल्याप्रमाणे ह्यापासून प्रसामान्यसमीकार काढावे; व 'क' आणि 'ख' च्या अर्हा मिळवाव्या.

ह्याशिवाय दुसरे अनेक विशिष्ट प्रकारचे असे वक्र प्रवृत्ति–दिग्दर्शनार्थ उपयोगात आहेत. परन्तु त्यांच्या अन्वायोजन रीतीही विशिष्ट प्रकारच्या असल्याने त्या सर्वांचा परामर्श घेणे येथे शक्य नाही. अशा विशिष्ट वक्रांपैकी एक वक्र असे:

$$\left. र = क. ख.^{ग^{य}} \right\} \quad (३६)$$

ह्या सूत्राने दर्शविल्या जाणाऱ्या वक्रास गोमपर्टझ् वक्र असे म्हणतात.

प्रकरण ८

कालिक-श्रेणी-विश्लेषण

आर्त्तव व चाक्रिक विश्लेषण

कालिक श्रेणीस ऐतिहासिक श्रेणी असेही म्हणतात. अशा प्रकारच्या श्रेणीतील वार्षिक न्यास तपासून पाहिल्यास त्यात नियामित अशी एक गती आढळून येते. ही गती त्या श्रेणीतील न्यासातून लागोपाठ वर्षानुवर्षे थोड्याफार फरकाने तशीच चालू असते. ऐतिहासिक श्रेणीतील ह्या गतीस आर्त्तवविचरण असे म्हणतात.

अशा श्रेणीच्या वार्षिक न्यासातील प्रत्येक महिना हा इतर महिन्यांच्या मानाने एका विशिष्ट स्थानी असतो. आर्त्तवविचरणाच्या निश्चितीत वार्षिक न्यासातील प्रत्येक महिन्याच्या ह्या विशिष्ट स्थानमाहात्म्याची निश्चिती हाच मुख्य प्रश्न असतो.

आर्त्तव-विचरण मापांकाच्या रीती

कालिक-श्रेणीतील आर्त्तव-विचरण मापांकाच्या नेहमीच्या प्रचारातील रीती अशा :

(१) सरल-माध्य रीती.

(२) सापेक्ष-बंध रीती.

(३) निष्पत्ति-ते-चालिष्णु माध्य रीती.

(४) निष्पत्ति-ते-प्रवृत्ति रीती.

सरल-माध्य रीती

(१) न्यासातील सर्व वर्षांच्या मासिक अर्हांचा योग घेऊन त्यांचा समान्तर-मध्यक काढा.

(२) प्रवृत्तीकरिता समायोजन द्या. वरील (१ मधील) मासिक माध्य हा न्यासातील सुदीर्घकालीन प्रवृत्तीमुळे विरूपित झालेला असतो. आरोही प्रवृत्तीत डिसेंबरचा माध्य हा वास्तविकापेक्षा अधिक असतो; कारण वार्षिक प्रवृत्ति-रेषेत डिसेंबरचे स्थान इतर महिन्यांच्या मानाने शेवटचे असते.

त्यानंतर प्रवृत्तीकरिता मासिक-वर्धन निश्चित करावे. त्याकरिता (१) प्रसामान्य मासिक-अंकाकरिता अल्पतम वर्गरेषेचे अन्वायोजन काढा. (२) त्याच्या

'ख' अर्हेस १२ ने भागा. आलेली अर्हा ही प्रत्येक महिन्याचा मासिक-माध्य त्याच्या पूर्वीच्या महिन्याच्या मासिक माध्यापेक्षा कितीने विरूपित आहे हे सूचित करते.

उदाहरणार्थ —फेब्रुवारीचा माध्य जानेवारीच्या पातळीत आणण्याकरिता फेब्रुवारीच्या माध्यातून सर्वसाधारण मासिक वर्धनांक उणे करावयास हवा. मार्चचा माध्य जानेवारीच्या पातळीत आणण्याकरिता मार्चच्या माध्यातून सर्वसाधारण मासिक वर्धनाच्या दुप्पट अर्हा उणे करावी. एप्रिलकरिता तिप्पट अर्हा उणे करावी .... वगैरे. अशा तऱ्हेने हे समायोजन पूर्ण करावे.

(३) आलेला शोधित माध्य हा एकूण कालखंडाच्या माध्यांचा किती प्रतिशत आहे हे काढावे. आलेल्या ह्या अर्हांना आर्त्तवविचरण-देशनांक असे म्हणतात. जानेवारीकरिता आलेली ९३ प्रतिशत अर्हा ही वार्षिक माध्यापेक्षा ७ प्रतिशत कमी आहे असे मानावे.

सापेक्ष-बंध-रीती

ह्या रीतीत सर्वप्रथम प्रत्येक मासिक अर्हा ही त्याच्या पूर्वीच्या मासिक अर्हेच्या किती प्रतिशत आहे हे ठरवावे. अशा तऱ्हेने प्राप्त होणाऱ्या अंकांना सापेक्ष-बंध असे म्हणतात.

सारणी–१७

१९१९ ते १९३३ दरम्यानचे साप्ताहिक भरताडाचे अंक
(१००० च्या एककात)

ास :	१९१९	१९२०	१९२१	१९२२	१९२३	१९२४	१९२५	१९
ानेवारी	७२८	८२०	७०५	७०२	८४५	८५८	९२१	९
ब्रुवारी	६८७	७७६	६८३	७६५	८४२	९०८	९०५	९
ार्च	६९७	८४८	६९२	८२६	९१७	९१६	९२४	९
प्रिल	७१५	७३१	७०६	७२३	९४१	८७५	९४१	९
	७५९	८६२	७५७	७८७	९७५	८९५	९६८	१०
न	८०९	८६०	७६५	८४२	१०११	९०६	९८९	१०
लै	८५८	९०१	७५१	८९५	९८६	८९४	९८६	१०
ॉगस्ट	८९२	९६८	८१०	८७७	१०४१	९७४	१०८०	११
टेंबर	९६०	९६९	८४१	९३५	१०३७	१०३७	१०७४	११
ॉक्टोबर	९६७	१००५	९२९	९९२	१०७८	१०९१	११०७	१२
व्हेंबर	८०७	८८४	७६१	९४४	९७८	९७५	१०२४	१०
सेंबर	७५८	७२३	६८३	८३८	८२६	८४७	८८८	९
ध्य :	८०३·८	८६२·२	७५६·९	८३८·०	९५६·४	९३१·३	९८३·०	१०२

मास:	१९२९	१९३०	१९३१	१९३२	१९३३	
जानेवारी	८९३	८३७	७१९	५६७	४७८	=
फेब्रुवारी	९४२	८७६	७०९	५६१	४८९	=
मार्च	९६२	८८३	७३५	५६५	४६७	=
एप्रिल	९९६	९१२	७५२	५७५	५०३	=
मे	१०५१	९१४	७४०	५२२	५२७	=
जून	१०५२	९३०	७४८	४९१	५९८	=
जुलै	१०३८	८९५	७३८	४८३	६१७	=
ऑगस्ट	१११७	९३८	७४७	५२५	६३४	=
सप्टेंबर	११३५	९३१	७३७	५७७	६३४	=
ऑक्टोबर	११६९	९५०	७५९	६३४	६५१	=
नोव्हेंबर	९७८	७९८	६५५	५४९	५७२	=
डिसेंबर	८३५	६८०	५५५	४८५	५१८	=
माध्य	१०१४·०	८७८·७	७१६·२	५४३·०	५५७·३	

सारणी–१८

आर्त्तव–विचरण–देशनांक–संगणना.

सरल–माध्य–रीती

१९१९ ते १९३३ दरम्यानची साप्ताहिक भरताड.

(१) मास	(२) मासिक-माध्य	(३) प्रवृत्तीकरिता शोधन	(४) शोधित माध्य	(५) आर्त्तव देशनांक
जानेवारी	७८६·९	—	७८६·९३	०·९३
फेब्रुवारी	७९४·३	– २·०५	७९२·२५	०·९४
मार्च	८२३·६	– ४·०९	८१९·५१	०·९७
एप्रिल	८१४·७	– ६·१४	८०८·५६	०·९६
मे	८५४·७	– ८·१८	८४६·५२	१·००
जून	७६७·५	–१०·२३	८५७·२७	१·०१
जुलै	८६५·७	–१२·२७	८५३·४३	१·०१
ऑगस्ट	९२१·८	–१४·३२	९०७·४८	१·०७
सप्टेंबर	९४८·६	–१६·३६	९३२·२४	१·१०
ऑक्टोबर	९८८·५	–१८·४१	९७०·०९	१·१५
नोव्हेंबर	८६७·३	–२०·४५	८४६·८५	१·००
डिसेंबर	७५०·५	–२२·५०	७२८·००	०·८६
			१०,१४९·१३	
		∴ माध्य =	८४५·७६	

सारणी १९ मध्ये दिलेले अंक हे निरपेक्ष अंक नसून प्रतिशततेत सापेक्ष-बंध म्हणून दिले आहेत.

अशा तऱ्हेने आलेल्या प्रत्येक महिन्याच्या सापेक्ष–बंध–अंकाचा माध्य काढावा. त्यामुळे कोणत्याही महिन्याचा त्याच्या पूर्वीच्या महिन्याशी काय संबंध आहे हे कळते. उदाहरणार्थ : सारणी १९ वरून कळून येईल की, जून महिन्याची दशा ही मेच्या मानाने १०१·६ प्रतिशत आहे.

सापेक्ष-बंध रीतीत समान्तर-मध्यकेऐवजी मध्यगाचा सापेक्ष-बंध म्हणून उपयोग प्रस्तुत होय; कारण असाधारण अशा चरम मासिक अर्हांमुळे समान्तर-मध्यक हे बरेचसे विरूपित होते.

मध्यगारूपी सापेक्ष-बंध हे फक्त त्या महिन्याचा पूर्वीच्या महिन्याशी काय संबंध आहे एवढेच दाखवितात. इतर महिन्यांशी त्यांचा काय संबंध आहे ह्याचा त्यावरून अंदाज घेता येत नाही. त्याकरिता प्राथमिक असे हे सापेक्ष-बंध-अंक साखळी-सापेक्षात रूपांतरित करणे श्रेयस्कर ठरते. जानेवारी ह्या पहिल्या महिन्याची अर्हा अशा वेळेस स्वेच्छया १०० मानून इतर महिन्यांचे सापेक्ष-बंध-अंक त्या प्रमाणात रूपांतरित करून घ्यावे. थोडक्यात ही संगणना अशी : कोणत्याही महिन्याच्या सापेक्ष-बंध-अंकास त्याच्या पूर्वीच्या महिन्याच्या साखळी-सापेक्षाने गुणून शंभराने भागावे. ह्याप्रमाणे बाराही महिन्यांचे साखळी-सापेक्ष-समंक प्राप्त झाल्यावर सरतेशेवटी आणखी एका पुढील वर्षीच्या जानेवारीकरिता हा समंक काढावा. त्यामुळे वार्षिक चक्रातील त्याच महिन्याची पुढची प्रगत-अर्हा काय असू शकेल हे कळते.

अशा तऱ्हेने आलेल्या जानेवारीच्या साखळी-सापेक्षात नेहमीच अन्तर आढळून येते. हे अन्तर न्यासातील प्रवृत्ति-वर्धनामुळे उद्भवते.

सारणी २० मध्ये हे प्रवृत्ति-वर्धन १८·९ इतके आहे. ह्या वर्धनाकरिताही साखळी-सापेक्षाचे समायोजन व्हावयास हवे. सदर समायोजन १२ महिन्यांच्या कालखंडावर पसरलेले असल्याने प्रत्येक महिन्याच्या साखळी-सापेक्ष अंकातून (स्तंभ २, सारणी २०) वरील अन्तराच्या $\frac{१}{१२}$ अर्हा अथवा त्याची पट एवढी वजा करावयास हवी. जानेवारीकरिता हा साखळी-सापेक्ष-अंक १०० आहे.

फेब्रुवारीकरिता तो $\left(\frac{८७·५-१८·९}{१२}\right)$ = ८५·९ होईल. मार्चकरिता हाच

शोधित – साखळी – सापेक्ष [८९·८ – १८·९ × २ । १२] = ८६·६

असा येईल .... एप्रिलकरिता $\left(८७·३ - \frac{१८·९\times३}{१२}\right)$ = ८३·६

असेल .... वगैरे ...

अशा तऱ्हेने ह्या सर्व बाराही महिन्यांच्या साखळी-सापेक्ष अर्हा मग एकाच पातळीवर येतात. प्राप्त समंकास **शोधित-साखळी सापेक्ष-अंक** असे म्हणतात. सारणी २०, स्तंभ ३ मध्ये १९१४ ते १९२९ ह्या कालखंडात संयुक्त संस्थानातील कोळसा उत्पादनाकरिता आलेले हे शोधित-अंक दिले आहेत.

निष्पत्ती-ते-चालिष्णुमाध्य रीतीः—

(१) न्यासातील आर्त्तव विचरणे प्रथमतः बारमाही चलिष्णु माध्याद्वारे सरालित करावी. न्यासातील वास्तविक अर्हा व आलेली चलिष्णु-माध्य अर्हा ह्यातील अन्तर हे न्यासातील आर्त्तवामुळे संभवते.

(२) न्यासातील प्रत्येक अर्हेची संवादी अशा त्याच्या चलिष्णु–माध्य अर्हेशी असणारी निष्पत्ती निश्चित करा.

(३) न्यासातील एकूण वर्षांच्या प्रत्येक महिन्याकरिता ह्या निष्पत्तीचा माध्य घ्या. हा माध्य काढण्याकरिता समान्तर-मध्यक अथवा मध्यगा उपयोगात आणू शकता.

(४) प्राप्त होणारा माध्य हा न्यासातील आर्त्तव–विचरणाचा देशनांक होय.

निष्पत्ती–ते–प्रवृत्ती रीतीः—

ह्या रीतीने न्यासातील आर्तव–विचरणांचे मापन होते. त्याशिवाय न्यासातील चक्रिक व समसंभावी विचरणांचेही मापन होते.

(१) न्यासातील प्रत्येक महिन्याची वास्तविक–अर्हा ही प्रथमतः संवादी अशा प्रवृत्ति-अर्हेच्या प्रतिशततेत रूपांतरित करून घ्यावी. त्याकरिता अल्पतम वर्ग-रीतीचा उपयोग करावा.

सारणी–१९

सापेक्ष-बंध रीती १९१४ ते १९२९ दरम्यान संयुक्त-संस्थानांत झालेले कोळशा

महिना	१९१४	१९१५	१९१६	१९१७	१९१८	१९१९
जानेवारी	---	९९.२९	१०१.७०	१०८.७८	९५.८९	१०५.८०
फेब्रुवारी	८८.२६	७८.००	९७.००	८६.२०	१०३.६७	७६.०८
मार्च	१२८.१६	१०८.४६	९६.९९	११५.७७	१०९.८९	१०६.८२
एप्रिल	५१.९४	९४.२५	७६.७३	८७.४२	९५.७०	९५.३९
मे	१२०.९२	१०३.२४	११५.३७	११२.५२	१०९.५७	११६.७५
जून	११०.०२	१०९.७६	९७.२७	९९.४३	१०१.३९	९८.६९
जुलै	१०९.२३	१०४.७४	१००.९८	९८.८७	१०७.४९	११५.२३
ऑगस्ट	११०.०३	१०७.२८	११२.०४	१०२.३३	१००.२५	१००.४१
सप्टेंबर	१०३.३६	१०७.३४	९८.५९	९५.२३	९२.८७	११०.५५
ऑक्टोबर	९६.५९	१०७.९१	१०६.४४	१०७.१६	१०२.१९	११८.६५
नोव्हेंबर	८८.५९	१०१.२१	१००.२७	९८.६६	८३.९४	३३.२३
डिसेंबर	११३.३९	१०२.३९	९८.१५	९२.३५	९१.५३	१९५.९०

	१९२३	१९२४	१९२५	१९२६	१९२
जानेवारी	१०८.०१	१२७.३३	१११.६१	१०१.३१	९९.
फेब्रुवारी	८४.०४	९०.०८	७५.०८	८६.७९	९३.
मार्च	१११.००	८७.२९	९६.५२	९९.०५	११३.
एप्रिल	९०.९४	७३.७०	८९.५५	८६.८८	५७.
मे	१०७.२६	१०६.०८	१०५.२८	९७.४६	१०२.
जून	९८.७२	९७.४६	१०४.७६	१०७.५१	१०२.
जुलै	९९.२१	१०६.०१	१०६.४९	१०३.५१	९२.
ऑगस्ट	१०८.२९	१०७.७१	११३.३९	१०६.६४	१२३.
सप्टेंबर	९४.५८	११७.९८	१०४.३२	१०५.६६	१००.
ऑक्टोबर	१०६.४२	११४.२३	११३.६४	१११.४७	१०४.
नोव्हेंबर	८७.२७	८७.९७	९५.४५	१०९.३८	९२.
डिसेंबर	९२.८२	१०९.९०	१०४.००	९६.५७	१०१.

सारणी–२०

आर्त्तव–विचरण–संगणना.

(सापेक्ष–बंध रीती)

महिना	मध्यगा सापेक्ष-बंध (१)	साखळी सापेक्ष (२)	शोधित साखळी–सापेक्ष (३)
जानेवारी	१०७·५	१००·०	१००·०
फेब्रुवारी	८७·५	८७·५	८५·९
मार्च	१०२·६	८९·८	८६·६
एप्रिल	८७·२	८७·३	८३·६
मे	१०९·२	९५·३	८९·०
जून	१०१·६	९६·८	८८·९
जुलै	१०२·३	९९·१	८९·६
ऑगस्ट	१०८·५	१०७·५	९६·४
सप्टेंबर	१०१·५	१०९·१	९६·५
ऑक्टोबर	१०९·०	११८·९	१०४·७
नोव्हेंबर	९१·९	१०९·३	९३·५
डिसेंबर	१०१·२	११०·६	९३·२
जानेवारी	१०७·५	११८·९	१००·०

(२) आलेल्या निष्पत्ति (वास्तविक / प्रवृत्ति) अर्हांचा एकूण कालखंडातील वर्षाकरिता मासिक-माध्य काढा. असा माध्य घेतांना न्यासातील आत्यंतिक चरम-अर्हा बाद कराव्या, कारण त्यामुळे समान्तर–मध्यक विरूपित होते.

(३) येणारा परिणाम हा न्यासातील आर्त्तव देशनांक दर्शित करतो (सारणी २१).

(४) आर्त्तव-देशनांकाच्या ह्या मासिक अर्हा जर निष्पत्ति–अर्हांतून बाद केल्या तर श्रेणीतील आर्त्तव–विचरणे त्यामुळे निरसित होतील; व मग फक्त चक्रिक व समसंभावी विचरणांच्या संचयनामुळे प्राप्त परिणामच तेवढे शिल्लक राहतात.

सारणी–२१

आर्त्तव व चक्रिक उच्चावचनांचे मापन.
(निष्पत्ती – ते –प्रवृत्ती रीती)
१९१९ ते १९३३ दरम्यान दिलेले रस्ते–बांधणीचा ठेका
(फक्त दोन वर्षांकरिता)

(१) वर्ष व महिना		(२) (का) दिलेला ठेका	(३) (ना) प्रवृत्ती	(४) का/ना	(५) (१+धा) आर्त्तव देशनांक	(६) (गा+दा) चक्रिक व समसंभावी
		(दशलक्ष स्के. यार्ड)				
१९१९	जानेवारी	०·२७	५·१७	०·०५	०·५१	–०·४६
	फेब्रुवारी	०·७८	५·२०	०·१५	०·५७	–०·४२
	मार्च	२·३७	५·२३	०·४५	१·०२	–०·५७
	एप्रिल	५·०१	५·२६	०·९५	१·६४	–०·६९
	मे	९·४३	५·२९	१·७८	१·५०	०·२८
	जून	६·६१	५·३३	१·२४	१·३७	–०·१३
	जुलै	५·७५	५·३६	१·०७	१·१८	–०·११
	ऑगस्ट	८·१५	५·३९	१·५१	१·१६	०·३५
	सप्टेंबर	३·८४	५·४२	०·७१	०·९९	–०·२८
	ऑक्टोबर	२·७९	५·४५	०·५१	०·८०	–०·२९
	नोव्हेंबर	२·०१	५·४८	०·३७	०·५९	–०·२२
	डिसेंबर	३·११	५·५२	०·५६	०·६७	–०·११
१९२०	जानेवारी	१·९६	५·५५	०·३५	०·५१	–०·१६
	फेब्रुवारी	४·२२	५·५८	०·७६	० ५७	०·१९
	मार्च	६·२५	५·६१	१·११	१·०२	०·०९
	एप्रिल	५·७९	५·६४	१·०३	१·६४	–०·६१
	मे	५·६१	५ ६८	०·९९	१·५०	–०·५१
	जून	२·९४	५·७१	०·५१	१·३७	–०·८६
	जुलै	२·६३	५·७४	०·४६	१·१८	–०·७२
	ऑगस्ट	२·०४	५·७७	०·३५	१·१६	–०·८१
	सप्टेंबर	२·९५	५·८०	०·५१	०·९९	–०·४८
	ऑक्टोबर	१·४५	५·८३	०·२५	०·८०	–०·५५
	नोव्हेंबर	१·३२	५·८७	०·२२	०·५९	–०·३७
	डिसेंबर	२·०१	५·९०	०·३४	०·६७	–०·३३

(पोर्टलँड सिमेंट असोसिएशन वरून)

सारणी–२२

आर्त्तव–देशनांक=संगणना (निष्पत्ती–ते–प्रवृत्ती रीती)

महिना	मासिक योग १९१९–१९३३	एकूण मास	मासिक माध्य
(१)	(२)	(३)	(४)
जानेवारी	७·६५	१५	०·५१
फेब्रुवारी	८·५४	१५	०·५७
मार्च	१५·४०	१५	१·०२
एप्रिल	२३·०२	१४	१·६४
मे	१८·११	१२	१·५०
जून	१९·२९	१४	१·३७
जुलै	१७·७८	१५	१·१८
ऑगस्ट	१७·३९	१५	१·१६
सप्टेंबर	१४·८६	१५	०·९९
ऑक्टोबर	१२·०८	१५	०·८०
नोव्हेंबर	८·८७	१५	०·५९
डिसेंबर	१०·०४	१५	०·६७

प्रकरण ९

सह-संबंध

वर्तुळाचा परिघ हा त्याच्या त्रिज्येच्या २ ग पट असतो. मनुष्याच्या उंचीत व त्याच्या वजनांतही असाच काहीसा संबंध असतो. पण हा संबंध वर्तुळाच्या परिघाचा त्याच्या त्रिज्येशी जो संबंध असतो, तसा व तितका नियमित व स्थिर नसतो. पहिल्या प्रकारचे संबंध हे गणित, पदार्थविज्ञान, रसायन, यासारख्या भौतिकी शास्त्रांचा विषय होत. संख्याशास्त्रात दुसऱ्या प्रकारच्या संबंधाचा विचार अंतर्भूत असतो. उदाहरणार्थ, मनुष्यास मिळणारी मजुरी व त्याच्या राहणीमानाचा खर्च. विद्यार्थ्यास परीक्षेत मिळालेले गुण व त्याच्या ठायी असलेली बुद्धिमत्ता वीज-वहाळीतून वाहणारा विजेचा प्रवाह व त्यामुळे घडणाऱ्या रासायनिक प्रक्रियेत जमा होणारे द्रव्य, इत्यादि.

सांख्यिकीत अशा संबंधास **सहसम्बन्ध** असे म्हणतात. दोन संबंधित राशींतील अथवा श्रेणीतील ह्या सहसम्बन्धाची तपासणी व मापन ज्या विधीमुळे शक्य होते, त्या विधीस **सहसम्बन्ध विधी** असे म्हणतात. ह्या दोन राशी जेव्हा परस्परानुरोधाने चलित होतात तेव्हा त्यास **सहसम्बन्ध-राशी** असे म्हणतात. अशा वेळेस एका राशीत घडून येणाऱ्या बदलांच्या अनुरोधाने दुसऱ्या राशीतही बदल संभवतात. हे परिवर्तन जर एकाच प्रवृत्तीचे असेल तर त्यास **प्रत्यक्ष-सहसम्बन्ध** असे म्हणतात. सदर परिवर्तन परस्पर–विरुद्ध असेल तर त्यास **प्रतीप–सहसम्बन्ध** असे म्हणतात.

सहसम्बन्धाची ही कल्पना दिलेल्या न्यासाच्या चित्रांकणावरून आपणास चटकन होऊ शकते. दोन श्रेणींतील न्यासाच्या असल्या चित्रांकणास **विक्षेप-चित्र** असे म्हणतात. अशा तऱ्हेचे एक विक्षेप–चित्र आकृती २३ मध्ये दिले आहे.

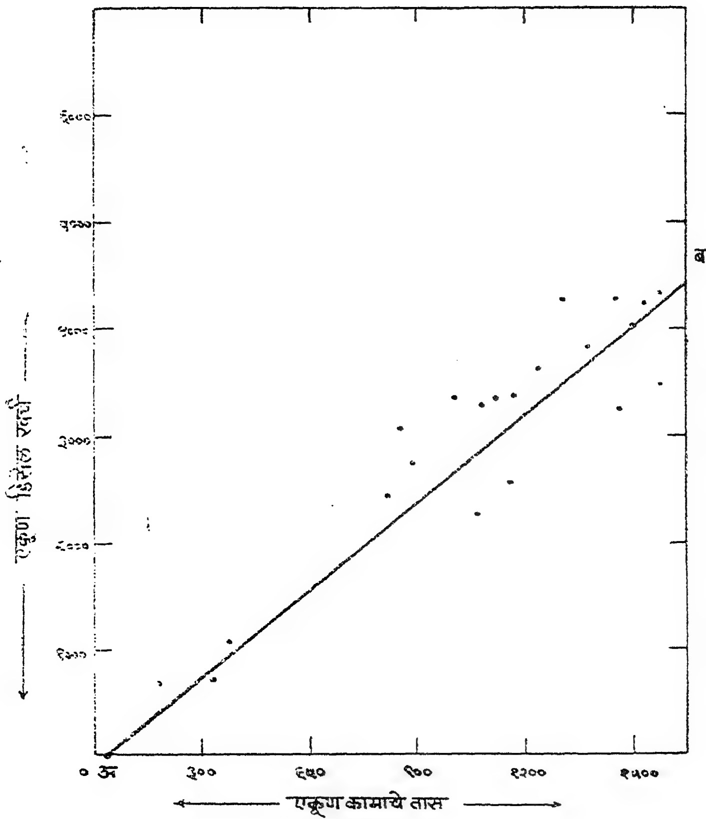
सहसम्बन्धाचे मापन

दोन राशींतील संबंध **सहसम्बन्ध** मापांकाने मोजला जातो. त्याकरिता त्या राशींच्या संबंधातील प्रवृत्तीचे मापन सम्बन्धादिक रेषेने करावयास हवे. त्यानंतर त्या सम्बन्धातील प्रवृत्तीचे ह्या रेषेपासूनचे विचलन काय हेही कळणे फायदेशीर असते. **सम्बन्धादिक्-रेषा,** त्याचे प्रमाप-विभ्रम तथा दोन चलांतील **सहसम्बन्ध मापांक** ह्या सर्वांच्या मापनास्तव ज्या दोन क्रिया उपयोगात आहेत, त्या अशा:–

(१) अल्पतम वर्ग रीती.

(२) गुणनफल-परिघात रीती.

दोन चलांतील सरल-रेखीय सहसम्बन्धाचाच विचार ह्या प्रकरणात केला आहे.



आकृती २३ : २२, डी ७—कॅटरपिलर ट्रॅक्टरचे कामाचे एकूण तास व खर्च झालेल्या डिझेलचे विक्षेप चित्र, त्यांतील सम्बन्धादिक् रेषेसह.

सारणी-२३

२२, डी ७--कॅटरपिलर-ट्रॅक्टरचे वार्षिक कामाचे तास, व त्याकरिता लागलेले डिझेल-तेल (गॅलनमध्ये)...

एकूण कामाचे तासः	एकूण खर्च झालेले डिझेल
०	२०
१७३	६९७
३३१	७०७
३८६	१०५९
८१७	२४०८
८९५	२७३१
१०१२	३३५५
१०६३	२२७८
१०६९	३२८६
१११९	३३४१
११६७	२५४१
११७०	३३७४
१२४१	३६१५
१३०७	४२६९
१३७०	३८०६
१४५२	४२८४
१४६६	३३६६
१५०३	४०४३
१५४०	४२३७
१५८५	३४८७
१५८५	४३१९
२४७२	७३६८

[मूळ = एका ट्रॅक्टर विभागाचा अप्रकाशित न्यास.]

ह्या न्यासावर आधारित विक्षेप-चित्र आकृती २३ मध्ये दिले आहे. प्रांकित बिन्दूतून जाणाऱ्या रेषेस सम्बन्धदिक्-रेषा असे नाव आहे. ही रेषा अल्पतमवर्गरेषा असून तिचे मापन अल्पतमवर्गरीतीने खाली दिल्याप्रमाणे करावे.

सारणी–२४

सम्बन्धादिक्–रेषेचे आगणन

२२, डी ७–कॅटरपिलर ट्रॅक्टरचे वार्षिक कामाचे तास व त्याकरिता खर्च झालेले

अनुक्रम	एकूण कामाचे तास य.	खर्चलेले डिझेल [गॅलनमध्ये] र.	य²	र
१	०	२०	०	४००
२	१७३	६९७	२९,९२९	४८५,८
३	३३१	७०७	१०९,५६१	४९९,८
४	३८६	१०५९	१४८,९९६	१,१२१
५	८१७	२४०८	६६७,४८९	५,७९८
६	८९५	२७३१	८०१,०२५	७,४५८
७	१०१२	३३५५	१,०२४,१४४	११,२५
८	१०६३	२२७८	१,१२९,९६९	५,१८९
९	१०६९	३२८६	१,१४२,७६१	१०,७९
१०	१११९	३३४१	१,२५२,१६१	११,१६
११	११६७	२५४१	१,३६१,८८९	६,४५६
१२	११७०	३३७४	१,३६८,९००	११,३८
१३	१२४१	३६१५	१,५४०,०८१	१३,०६

अनुक्रम	एकूण कामाचे तास	खर्चलेले डिझेल [गॅलनमध्ये] र	य²	र
१४	१३०७	४२६९	१,७०८,२४९	१८,२
१५	१३७०	३८०६	१,८७६,९००	१४,४
१६	१४५२	४२८४	२,१०८,३०४	१८,३
१७	१४६६	३३६६	२,१४९,१५६	११,३
१८	१५०३	४०४३	२,२५९,००९	१६,३
१९	१५४०	४२३७	२,३७१,६००	१७,९
२०	१५८५	३४८७	२,५१२,२२५	१२,१
२१	१५८५	४३१९	२,५१२,२२५	१८,६
२२	२४७२	७३६८	६,११०,७८४	५४,२
एकूण	२४,७२३	६८,५९१	३४,१८५,३५७	२६६,

वरील अर्हा अल्पतमवर्ग रीतीतील प्रसामान्य समीकारांत समाविष्ट केल्यास खालील समीकार येतात—

$$६८,५९१ = २२ क + २४,७२३ य.$$

$$९४,७७८,७२४ = २४,७२३ क + ३४,१८५,३५७ ख.$$

समयामिक रीतीने हे समीकार सोडविल्यास

$$क = ११·३१$$

$$ख = २·७६$$

ह्या अर्हा येतात. सारणी २३ मधील न्यासाकरिता येणारा आगणित समीकार असा:—

$$र = ११·३१ + २·७६ य$$

ह्या समीकाराने दर्शविली जाणारी रेषा आकृती २३ मध्ये 'अत्र'ने दाखविली आहे. ह्या आकृतीवरून हेही दिसून येईल की, प्रांकित बिन्दूंपैकी काही रेषेवर अथवा रेषेजवळ आहेत. परन्तु काही सदर रेषेपासून बरेच दूर आहेत. 'अत्र' ह्या रेषेस सम्बन्धदिक् रेषा असे म्हणतात. ह्या रेषेपासून प्रांकित बिन्दूंचे जे अन्तर आहे, त्यास विक्षेप असे म्हणतात. सम्बन्धादिक्–रेषेभोवतालच्या ह्या विक्षेपवर्गांच्या विस्ताराचे मारांकास आगणकाचे प्रमाप–विभ्रम असे म्हणतात. पूर्वीच्या प्रकरणातून वर्णिलेल्या प्रमाप–विचलनासारखेच ह्याचे रूप आहे.

प्रमाप–विचलनामुळे समान्तर–मध्यकेभोवतीच्या विक्षेपाचे मापन होते; तर आगणकातील प्रमाप–विभ्रमाने सम्बन्धादिक्–रेषेभोवतीच्या विक्षेपाचे मापन होते. $ध_र$ ने जर आगणकातील प्रमाप–विभ्रम दर्शविला तर प्रमाप विचलनानुसार त्याचे सूत्र असे:—

$$ध_र = \sqrt{यो_ध^2 / डा.} \qquad (३७)$$

प्रमाप–विचलनासारखाच प्रमाप–विभ्रमाचाही उपयोग आहे. समान्तर–मध्यकेच्या दोहो बाजूंस १–धि अन्तरात ६८ प्रतिशत राशी–अर्हा येतात. अगदी तसेच, ह्या प्रमाप–विभ्रमातही सम्बन्धदिक्–रेषेच्या दोहो बाजूंस १–$ध_र$ अंतरात एकूण ६८ प्रतिशत राशी–अर्हा येतात.

प्रमाप–विभ्रम	......	प्रतिशत राशी–अर्हा
०·६७४५ $ध_र$	......	५० %
१·०००० ,,	......	६८ ,,
२·०००० ,,	......	९५ ,,
३·०००० ,,	......	९९·७ ,,

सारणी–२५

डिझेल–खर्चाच्या सत्य व आगणित अर्हा व प्रमाप–विभ्रम गणनेकरिता आवश्यक अशी संगणना.

डी ७–कॅटरपिलर ट्रॅक्टरकरिता.

(१) सत्य अर्हा (र)	(२) आगणित अर्हा ($र_ग$)	(३) घ. ($र - र_ग$)	(४) $घ^2$ $(र - र_ग)^2$
२०	११·३१	+ ८·६९	७५·५१६१
६९७	४८८·७९	+२०८·२१	४३,३५१·४०४१
७०७	९२४·८७	–२१७·८७	४७, ४६७·३३६९
१०५९	१०७६·६७	– १७·६७	३१२·२२८९
२४०८	२२६६·२३	+१४१·७७	२०,०९८·७३२९
२७३१	२४८१·५१	+२४९·४९	६२,२४५·२६०१
३३५५	२८०४·४३	+५५०·५७	३०३,१२७·३२४९
२२७८	२९४५·१९	–६६७·१९	४०५,१४२·४९६१
३२८६	२९६१·७५	+३२४·२५	१०५,१३८·०६२५
३३४१	३०९९·७५	+२४१·२५	५८,२०१·५६२५
२५४१	३२३२·२३	–६९१·२३	४७७,७९८·९१२९
३३७४	३२४०·५१	+१३३·४९	१७,८१९·५८०१
३६१५	३४३६·४७	+१७८·५३	३१,८७२·९६०९
४२६९	३६१८·६३	+६५०·३७	४२२,९८१·१३६९
३८०६	३७९२·५१	+ १३·४९	१८१·९८०१
४२८४	४०१८·८३	+२६५·१७	७०,३१५·१२८९
३३६६	४०५७·४७	–६९१·४७	४७८,१३०·७६०९
४०४३	४१५९·५९	–११६·५९	१३५९३·२२८१
४२३७	४२६१·७१	– २४·७१	६१०·५८४१
३४८७	४३८५·९१	–८९८·९१	८०८०३९·१८८१
४३१९	४३८५·९१	– ६६·९१	४४७६·९४८१
७३६८	६८३४·०३	+५३८·९७	२८५१२३·९६०९
६८,५९१	६८,४८४·३०	+१०६·७०	३६९९६१०४·२०

वरील सारणीत स्तंभ १ मधील अर्हा ह्या सारणी २३ स्तंभ २ वरून घेतल्या. आगाणित अर्हा ह्या खालीलप्रमाणे संगणित केल्या.

सारणी २३ मधील दोन्ही राशीकरिता सारणी २४ वरून आलेली सम्बन्धदिक्–रेषा

$$र = ११\cdot३१ + २\cdot७६ \text{ य.}$$

ह्या समीकारांत सारणी २३ मधील संबंधित 'र'ची 'य'–अर्हा अनुक्रमे ठेवल्यास सारणी २५ स्तंभ २ मध्ये दिलेल्या अर्हा येतात. उदाहरणार्थ– र = २० करिता 'य' ची अनुक्रम अर्हा शून्य आहे म्हणजे... $र = ११\cdot३१ + (२\cdot७६ \times ०)$

$$= ११\cdot३१.$$

तसेच, ६९७ करिता य–अर्हा १७३ आहे. म्हणजे—

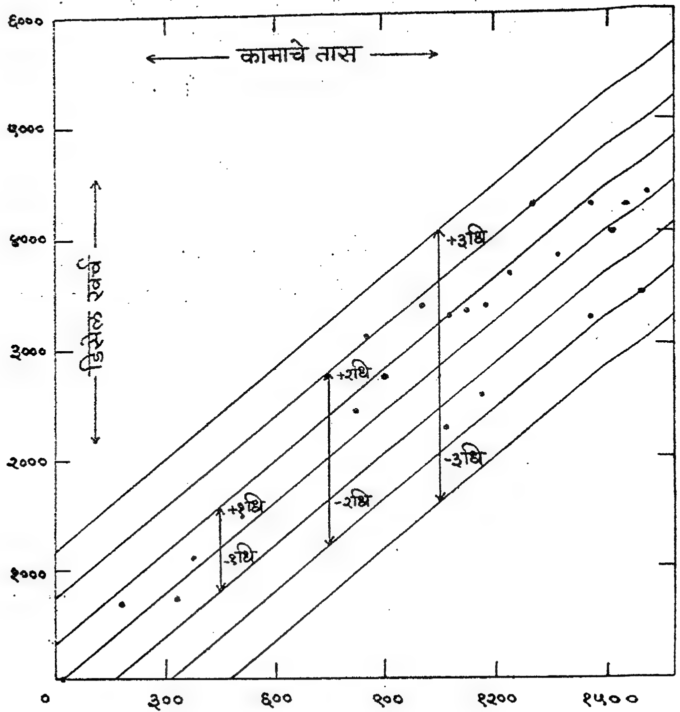
$$र = ११\cdot३१ + (२\cdot७६ \times १७३)$$
$$= ११\cdot३१ + ४७७\cdot४८$$
$$= ४८८\cdot७९$$

वगैरे. सारणी २५ मधील स्तंभ ३ व ४ चे गणन नेहमीप्रमाणेच सोपे असे आहे.

प्रमाप–विभ्रमाचे सूत्र असे:—

$$ध_र = \sqrt{यो_{ध}^{२} / डा.}$$
$$= \sqrt{३६९६१०४\cdot२० / २२}$$
$$= \sqrt{१६८००४\cdot७४}$$
$$= ४०९\cdot८८ \text{ गॅलन.}$$

हा प्रमाप–विभ्रम घेऊन ± १ ध, ± २ ध व ± ३ ध च्या रेषा, र = ११·३१ + २·७६ य ह्या सम्बन्धदिक् –रेषेभोवती आकृती २४ मध्ये प्रांकित केल्या असून, त्यावरून दिसून येईल की सम्बन्धदिक्– रेषेपासूनच्या ± १ ध अन्तरात ६८ प्रतिशत अर्हा आहेत, तर ± २ ध अन्तरात ९५ प्रतिशत व ± ३ ध अन्तरात जवळजवळ सर्वच अर्हा आहेत. आकृती २४ मधील बिन्दूंची खरोखरीच गणना केली तर आढळून येईल की, ± १ ध ह्या अन्तरात १५ बिन्दू पडतात; तर ± २ ध ह्या अन्तरात एकूण २१ बिन्दू आहेत; व ± ३ ध ह्या अन्तरात सर्वच बिन्दू आहेत.



आकृती २४ : डी ७–२२ कॅटरपिलर ट्रॅक्टरकरिता एकूण कामाचे तास व खर्च झालेले डिझेल; त्यातील सम्बन्धादिक् रेषा व त्या रेषेपासूनचें प्रमाप–विभ्रम अन्तर.

सहसम्बन्ध–मापांकांची गणना

हे मापांक एकदमच सारणी २४ मधील आगणित–समंकावरून प्राप्त होते. त्याचे सूत्र असेः—

$$द^{२} = \frac{क.\ धी\ (य) + ख.\ धी\ (यर) - डा.\ ग_{र}^{२}}{धी\ (र^{२}) - डा\ ग_{र}^{२}} \qquad (३८)$$

वरील सूत्रातील '$ग_{र}$' शिवाय सर्व अर्हा सारणी २४ मध्ये संगणित आहेत; $ग_{र}$ म्हणजे 'र' चा माध्य होय.

$$ग_{र} = \frac{६८,५९१}{२२} = ३११७\cdot७६$$

म्हणून,

$$द^2 = \frac{११\cdot३१ \times २४,७२३ + २\cdot७६ \times ९४७७८७२४ - २२ \times ३११७\cdot७६}{२६६४६९५१३ - २२ \times ३११७\cdot७६}$$

$$= \cdot९८२७७$$

$$\therefore द = + \cdot९९१$$

अशा प्रकारे सम्बन्ध–मापांक हे तीन विभागांत विभक्त होते. (१) सह–सम्बन्धाचे रूप ठरविणे : सम्बन्धदिक्–रेषा (२) सदर सहसम्बन्धातील विचलनाचे मापन करणे : आगणकांतील प्रमाप–विभ्रम. (३) सहसम्बन्ध–मापांकाचे सापेक्षात रूपांतर करणे–सहसम्बन्ध–मापांक (द.)

सारणी २४ व २५ वरून दिसून येईल की, अल्पतम–वर्गरीत्यानुसार केलेल्या संगणना ह्या अतिशय क्लिष्ट व मोठ्या अंकात असतात. सुटसुटीत व लहान अंकात ह्या गणना केल्यास वेळेची व श्रमाची बचत तर होतेच, पण परिणामाचीही खात्री असते. त्याचप्रमाणे ह्या गणना यंत्राशिवाय साध्या सारणीच्या साहाय्यानेही उरकता येतात.

ह्या अशा प्रकारच्या विधीस सांख्यिकीत **गुणनफल–परिघात विधी** असे म्हणतात.

सम्बन्धदिक्–रेषा; आगणकाचे प्रमाप–विभ्रम व सहसम्बन्ध–मापांकाची गणना थोडक्यात ह्या विधिद्वारा कशी आटोपता येते, हे खालील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल.

सारणी–२६

तांदुळाखालील क्षेत्र व एकूण उत्पादन मुंबई–राज्य १९०९–४९ सहसम्बन्ध–मापांकाप्रीत्यर्थ आव

(आकडे = हजारात)

वर्ष :	क्षेत्रफळ :	उत्पादन :	$य^{'}$ = य–१९०२	$र^{'}$ = र–८२१	$य^{'2}$	$र^{'2}$
१९०९–१०	१६४६	८२९	–२५६	+८	६५५३६	६४
१९१०–११	१६३३	७५६	–२६९	–५६	७२३६१	३१३६
१९११–१२	१४५१	५७९	–४५१	–२४२	२०३४०१	५८५६४
१९१२–१३	१६२४	८२०	–२७८	–१	७७२८४	१
१९१३–१४	१६६३	८२२	–२३९	+१	५७१२१	१
१९१४–१५	१६७८	८७३	–२२४	+५२	५०१७६	२७०४
१९१५–१६	१७१८	७७५	–१८४	–४६	३३८५६	२११६
१९१६–१७	१८६०	८३३	–४२	+१२	१७६४	१४४
१९१७–१८	१९२३	९०५	+२१	+८४	४४१	७०५६
१९१८–१९	१७०९	३९१	–१९३	–४३०	३७२४९	१८४९००
१९१९–२०	१९३१	९८६	+२९	+१६५	८४१	२७२२५
१९२०–२१	१९०६	७३५	+४	–८६	१६	७३९६
१९२१–२२	१९५६	९२४	+५४	+१०३	२९१६	१०६०९

वर्ष :	क्षेत्रफळ	उत्पादन	य' = य−११०२	र' = र−८२१	$य'^2$	$र'^2$	य'
९२२–२३	१८८६	८८५	−१६	+६४	२५६	४०९६	−१
९२३–२४	१८३१	७५४	−७१	−६७	५०४१	४४८९	४
९२४–२५	१८८७	८५६	−१५	+३५	२२५	१२२५	—
९२५–२६	१९०६	७९५	+४	−२६	१६	६७६	—
९२६–२७	१९७१	९४२	+६९	+१२१	४७६१	१४६४१	८
९२७–२८	२०१३	९४१	+१११	+१२०	१२३२१	१४४००	१३
९२८–२९	१९५३	९३८	+५१	+११७	२६०१	१३६८९	५
९२९–३०	१९२८	८१४	+२६	−७	६७६	४९	—
९३०–३१	१९९१	८६९	+८९	+४८	७९२१	२३०४	४
९३१–३२	१९७६	९०३	+७४	+८२	५४७६	६७२४	६
९३२–३३	२०२७	९०७	+१२५	+८६	१५६२५	७३९६	१०
९३३–३४	२०२२	९०२	+१२०	+८१	१४४००	६५६१	९
९३४–३५	२०४८	९५३	+१४६	+१३२	२१३१६	१७४२४	११
९३५–३६	१९७२	८४३	+७०	+२२	४९००	४८४	१
९३६–३७	१८३१	७००	−७१	−१२१	५०४१	१४६४१	८
९३७–३८	२०३७	८८७	+१३५	+६६	१८२२५	४३५६	८
९३८–३९	२०१५	७८९	+११३	−३२	१२७६९	१०२४	−३

वर्ष	क्षेत्रफळ	उत्पादन	य' = य−१९०२	र' = र−८२१	य'²	र'²	य'र'
१९३९–४०	१८६०	६६९	−४२	−१५२	१७६४	२३१०४	६
१९४०–४१	१९७०	८०२	+६८	−१९	४६२४	३६१	−१
१९४१–४२	१९१५	६३५	+१३	−१८६	१६९	३४५९६	−२
१९४२–४३	२११३	९२३	+२११	+१०२	४४५४	१०४०४	२१
१९४३–४४	२००५	८८२	+१०३	+६१	१०६०९	३७२१	६
१९४४–४५	२०६३	८२५	+१६१	+४	२५९२१	१६	
१९४५–४६	२०९३	८२१	+१९१	०	३६४८१	०	
१९४६–४७	२१०६	८४६	+२०४	+२५	४१६१६	६२५	५
१९४७–४८	२०३१	७९७	+१२९	−२४	१६६४१	५७६	−३
१९४८–४९	१९५०	७०२	+४८	−११९	२३०४	१४१६१	−५
	७६०९८	३२८१७	+२३६९ −२३५१ +१८	−१६१४ +१५९१ −२३	९११९८२	५०५६५९	+३६ −३२ +३३

ताळा : $(य' + र')^{२} = य'^{२} + र'^{२} + २\, य'र'.$

$= ९११९८२ + ५०५६५६ + (२ \times ३३६७४६)$

$= २०९८३३३.$

सारणी २६ वरून खालील अर्हा गोळा होतात.

धी ($य'$) = १८, धी ($र'$) = – २३

धी ($य'^{२}$) = ९१९,१८२; धी ($र'^{२}$) = ५०५,६५९

धी ($य'र'$) = ३३६,७४६; डा = ४०

गुणनफल–परिघात विध्यनुसार सहसम्बन्धमापांकाचे सूत्र असे :

$$द = \frac{त}{धि_{य} \times धि_{र}} \quad (३९)$$

आणि,

$$त = \frac{धी\ (य'र')}{डा} - ग_{य} \times ग_{र} \quad (४०)$$

व,

$$धि_{य} = \sqrt{\frac{धी_{य}^{२}}{डा} - ग_{य^{२}}} \quad (४१)$$

$$धि_{र} = \sqrt{\frac{धी_{र^{२}}}{डा} - ग_{र^{२}}} \quad (४२)$$

सारणी २६ मध्ये आलेल्या अर्हांवरून—

$$ग_{य} = \frac{१८}{४०} = ०{\cdot}४५० \quad \therefore ग_{य}^{२} = ०{\cdot}२०२५००$$

$$ग_{र} = \frac{-२३}{४०} - ०{\cdot}५७५ \quad \therefore ग_{र}^{२} = ०{\cdot}३३०६२५$$

$$म्हणून :\ धि_{य} = \sqrt{\frac{९१९१८२}{४०} - ०{\cdot}२०२५००}$$

$$= १५१.$$

$$व,\ धि_{र} = \frac{\sqrt{५०५६५९}}{४०} - ०{\cdot}३३०६२५$$

$$= ११२{\cdot}५.$$

$$याकरिता,\ त = \frac{३३६७४६}{४०} - (\cdot४५० \times \cdot५७५)$$

$$= ८४१८{\cdot}३९$$

ह्या अर्हा सहसम्बन्ध–मापांकाच्या सूत्रांत समाविष्ट केल्यास:

$$द = \frac{८४१८.४९}{१५१.५ \times ११२.५} = ०.४९३$$

वरील आलेल्या अर्हावरून सम्बन्धादिक्–रेषेचे मापन (सदर रेषेचे मूलबिन्दू माध्य–बिन्दूवर असताना) खालील सूत्रावरून होते.

$$र' = द \times \frac{धि_{र'}}{धि_{य'}} \times य' \qquad (४३)$$

आवश्यक अशा वरील पदांच्या अर्हा समाविष्ट केल्यास—

$$र' = .४९३ \times \frac{११२.५}{१५१.५} \times य'$$

$$\therefore र' = ०.३६९ \; य'$$

$$\text{परन्तु}: र' \; र - ८२१, = \text{आणि } य' = (य - १९०२)$$

$$\therefore र - ८२१ = ०.३६९ \; (य - १९०२)$$

$$र = ११९.१६ + ०.३६९ \; य.$$

आणि ह्या सम्बन्धादिक्–रेषेभोवतालचे प्रमाप–विभ्रम खालील पदसंहतीवरून येते:

$$ध_{र} = धि_{र}\sqrt{१ - द^2} \qquad (४४)$$

$$= ११२.५\sqrt{१ - (.४९३)^2}$$

$$= ९७.९$$

वरील दोन्ही उदाहरणे अवर्गित न्यासाची आहेत. वर्गित अशा न्यासातील सहसम्बन्धाची सुद्धा गणना अल्पतमवर्गरीतीप्रमाणे व गुणनफल–परिघात विधीने करता येते. साधारण ३० ते ४० पद राशी ज्यात आहेत अशा अवर्गित न्यासातील सहसम्बन्धाची गणना वरील प्रकारे करणे एक वेळ शक्य आहे. पण ज्या न्यासातील पद–राशी शेकड्याने आहेत त्याकरिता वर्गित वंटनाचाच मार्ग चोखाळावा लागतो.

अशा एका वर्गित–वंटनातील सहसम्बन्ध–मापांकाचे गणन कसे करायचे ते खालील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल. अशा वेळेस त्या न्यासाची–सहसम्बन्ध सारणीत सर्वप्रथम रचना करावयास हवी.

ह्या सहसम्बन्ध सारणीचे रूप द्विगुणी–वारंवारता वंटनासारखे असून त्यांतील तत्त्व मात्र पूर्वी दिलेल्या विक्षेप–चित्रानुसार असते. विक्षेप–चित्रात बिन्दूचा उपयोग असतो, तर सहसम्बन्ध सारणीत समंकाचा उपयोग असतो. सारणीच्या साधारण रूपावरून सारणीतील न्यासात कितपत सम्बन्ध आहे, ह्याचे सर्वसाधारण ज्ञान होऊ शकते....

अशा एका न्यासाकारिता सहसम्बन्ध–सारणी, व सहसम्बन्ध–मापांकाकारिता आवश्यक अशा गणना खाली दिल्या आहेत.

सारणी—२७ : सहसम्बन्ध सारणी = कोकणातील ४३५ गावांकी

य = भौगोलिक क्षेत्र

संभागान्तराल	मध्य-अर्हा	च	य	चय	चय	य—तांदळाखालील			
						१ / १२५	१२६ / २५०	२५१ / ३७५	३ / ५
						६२.५	१८७.५	३१२.५	४ ३
						११५	१२४	५१	
						०	१	२	
						०	१२४	१०२	
						०	१२४	२०४	२
१—५००	२५०	८६	१३	१११८	१४५३४	६३	२०	१	
५०१—१०००	७५०	१०५	१२	१२६०	१५१२०	५७	३०	१४	
१००१—१५००	१२५०	९१	११	१००१	११०११	३८	२०	१५	
१५०१—२०००	१७५०	५५	१०	५५०	५५००	११	२१	९	
२००१—२५००	२२५०	३०	९	२७०	२४३०	१३	८	२	
२५०१—३०००	२७५०	२०	८	१६०	१२८०	५	६	३	
३००१—३५००	३२५०	१८	७	१२६	८८२	६	१	५	
३५०१—४०००	३७५०	८	६	४८	२८८	२	३		
४००१—४५००	४२५०	१०	५	५०	२५०		८	१	
४५०१—५०००	४७५०	२	४	८	३२		२		
५००१—५५००	५२५०	४	३	१२	३६		२		
५५०१—६०००	५७५०	२	२	४	८		२		
६००१—६५००	६२५०	२	१	२	२		१	१	
६५०१—७०००	६७५०	२	०	०	०		१		
एकूण		४३५		४६०९	५१३७३				

सम्बन्धादिक् रेषा, प्रमाप-विभ्रम व सह-सम्बन्ध-मापांक गणनेप्रीत्यर्थ आवश्यक त्या अर्हा वरील सारणीवरून व खाली दिलेल्या विधानावरून येतात...

डा = ४३५, धी (यं) = ५०३, धी (रं) = ४६०९,

धी ($य^२$) = १६७५, धी ($र^२$) = ५१३७३, धी (यर) = ४७३७

अल्पतमवर्गरीतीच्या समीकारांत वरील अर्हा समाविष्ट केल्यास खालील परिणाम संभवतो.

$$४६०९ = ४३५ क + ५०३ ख.$$

$$४७३७ = ५०३ क + ५१३७३ ख.$$

समयामिक समीकार विधीने वरील समीकार सोडाविल्यास खालीलप्रमाणे क व ख च्या अर्हा येतात.

$$क = ११\cdot२३२$$

$$ख = -०\cdot५५०९$$

म्हणून सारणी २७ मधील न्यासाची सम्बन्धदिक्-रेषा

∴ र = ११·२३२ − ०·५५०९ य. होय.

सदर रेषेभोवतीच्या प्रमाप-विभ्रम आगणनार्थ खालील सूत्र वापरावे.

$$ध_र^{\,२} = \frac{धी\,(र^२) - क\cdot धी\,(र) - ख\cdot धी\,(य\,र)}{डा\cdot} \qquad (४५)$$

$$= \frac{५१३७३ - ११\cdot२३२\times४६०९ - (-०\cdot५५०९\times४७३७)}{४३५}$$

$$= ५\cdot८९७१ \qquad \therefore ध_र = २\cdot४२९$$

वरील न्यासातील सहसम्बन्ध-मापांक खालील सूत्रावरून आगणित करावा

$$द^२ = \frac{क.\ धी\,(य) + ख.\ धी\,(यर) - डा.\ ग_र^{\,२}}{धी\,(र^२) - डा.\ ग_र^{\,२}}$$

$$= \frac{११\cdot२३२\times५०३ + (-०\cdot५५०९\times४७३७) - ४३५\times१०\cdot६}{५१३७३ - ४३५\times१०\cdot६}$$

$$= -०\cdot३२? \qquad \therefore द = -०\cdot१७९$$

इतर सहसम्बन्ध-विधी अनुस्थिती सहसम्बन्ध

शैक्षणिक व मनोवैज्ञानिक क्षेत्रातून ज्या सहसम्बन्ध-विधीचा विशेष उपयोग होतो, त्या विधीस " अनुस्थिती-सहसम्बन्ध " असे म्हणतात.

ह्या विधीत न्यासातील अनुक्रमांक त्याच्या स्थितीप्रमाणे निश्चित करतात. त्यानंतर त्यातील सहसम्बन्ध स्पीअरमनच्या सूत्रानुसार काढावा.

$$दि = १ - \frac{६\ धी - (धा^२)}{डा\ (डा^२ - १)} \qquad (४६)$$

सारणी–२८

अनुस्थिती–सहसम्बन्धाचे मापन.

१५ विद्यार्थ्यांस २ – परीक्षेत मिळालेले गुणांक.

(१) विद्यार्थी क्रम	(२) परीक्षा १ प्रतिशत गुण	(३) परीक्षा १ स्थिती	(४) परीक्षा २ प्रतिशत गुण	(५) परीक्षा २ स्थिती	(६) अनुस्थिती अंतर (घा)	(७) घा^{२}
१	१००%	१	९०%	३	२	४
२	९८	२	९५	१	१	१
३	९५	३	८९	४	१	१
४	९१	४	८७	५	१	१
५	९०	५	९३	२	३	९
६	८५	६	८६	६	०	०
७	८३	७	८०	७	०	०
८	८२	८	७९	८	०	०
९	८१	९	७६	१०	१	१
१०	८०	१०	७७	९	१	१
११	७०	११	७२	११	०	०
१२	६५	१२	६०	१४	२	४
१३	६३	१३	६२	१३	०	०
१४	६०	१४	५०	१५	१	१
१५	५०	१५	६३	१२	३	९
						३२

$$दि = १ - \frac{६\ (३२)}{१५\ (२२५-१)} = ०\cdot९५३$$

कित्येक वेळा एकापेक्षा अधिक विद्यार्थ्यांस सारखेच गुणांक प्राप्त झाल्यास मग प्रश्न पडतो की त्या विद्यार्थ्यांची अनुस्थिती कशी ठरवायची ?

खालील दोन रीती त्याकरिता उपलब्ध आहेत. (अ) कंसात्मक रीती. (ब) माध्य–अनुस्थिती रीती.

कंसात्मक रीतीत सारख्या गुणांकाच्या सर्व विद्यार्थ्यांस तोच क्रमांक देण्यात येतो. परन्तु त्यानंतरच्या पदाला (विद्यार्थ्यास) अनुस्थिति–क्रमांक देताना असे गृहीत धरण्यात येते की सदर पद जणु योग्य अशा क्रमात असून अनिश्चितीचा प्रश्नच उद्भवला नव्हता.

माध्य–अनुस्थिती रीतींत ज्या पदांच्या बाबतीत अनिश्चितीचा प्रश्न असेल अशा सर्वांना त्यांच्या अनुस्थितीचा माध्य काढून तोच माध्य–क्रमांक देण्यात येतो. त्यानंतरचा क्रमांक खालच्या पदास देतात. अशा तऱ्हेने सर्व राशीक्रम पूर्ण करावा.

उदाहरणार्थ :

विद्यार्थी	अंशक	कंसात्मक रीती	माध्य–अनुस्थिती रीती
अ	१००%	१	१
ब	९५	२	३
क	९५	२	३
ड	९५	२	३
ज	९४	५	४
श	९२	६	५.५
च	९२	६	५.५
ह	९०	८	६

मूळन्यास प्रमामान्य बंटनात आहे असे मानल्यास 'द' व 'दि' मध्ये खालील सम्बन्ध आढळून येईल.

$$\text{द} = २ \text{ ज्या} \left(\frac{\text{ति}}{६} \text{ दि} \right) \qquad (४७)$$

जेव्हा अनुस्थितीवर आधारित असे सहसम्बन्धाचे सर्वसाधारण गणन हवे असेल, तेव्हा ते स्पीअरमनच्या 'फूट–रूल' सूत्रानेही प्राप्त होऊ शकते.

स्पीअरमन 'फूट–रूल'चे सूत्र असे :

$$\text{दा} = १ - \frac{६ \cdot \text{धी} (\text{छा})}{\text{डा}^{२} - १} \qquad (४८)$$

ज्यात, छा = फक्त धन अनुस्थित्यंतरेच होत.

प्रकरण १०

सहसम्बन्ध—अरेखीय; बहुगुण; आंशिक

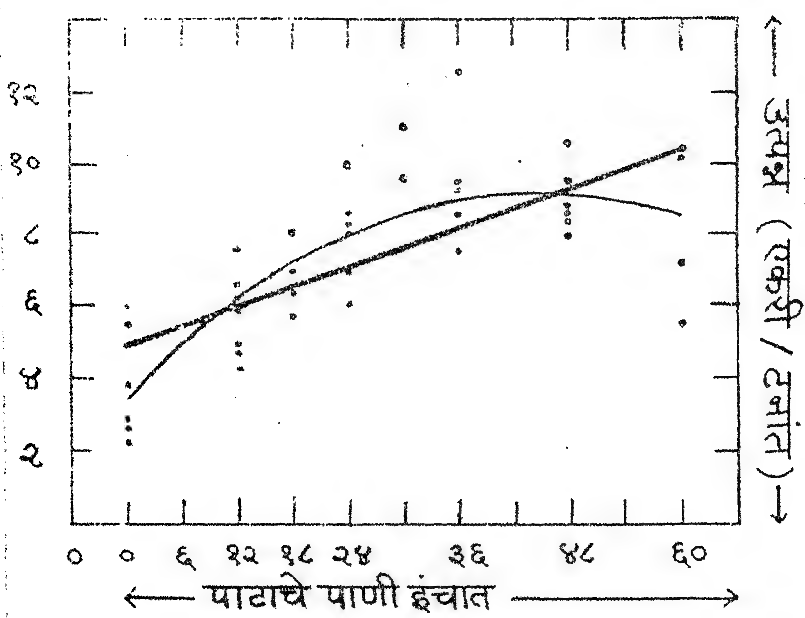
सरळ-सहसम्बन्धाची काही उदाहरणे मागच्या प्रकरणात आपण तपासली. वारंवारता बंटनातून असणारा सहसम्बन्ध साधारणत: अशा प्रकारचा असतो. सरलसहसम्बन्धात दोन चलांची आवश्यकता असते.

प्रत्यक्षात मात्र एकमेकांवर अवलंबून असणाऱ्या राशी दोहोंपेक्षा जास्त असतात; व त्या नेहमी ऐतिहासिक श्रेणीच्याच रूपात असतात. कालिक श्रेणीतील प्रवृत्ती रेखीय असण्याऐवजी बहुधा अरेखीयच जास्त आढळून येते. त्यामुळे त्यातील सहसम्बन्धही अरेखीय पद्धतींचेच संभवतात. खालील सारणी पहा—

सारणी—२९

अल्फाल्फाचे उत्पादन व पाटाचे पाणी

दिलेले पाणी (इंचात)	एकरी उत्पादन (टनात)						माध्य
	१९१०	१९११	१९१२	१९१३	१९१४	१९१५	
०	३·८५	५·९४	५·५२	२·७५	२·८९	२·३५=	३·८८
१२	४·७८	७·५२	६·५१	४·३१	५·८३	४·८४=	५·६३
१८	—	—	७·२	५·८९	८·०२	६·४६=	६·८०
२४	६·००	८·३८	८·३२	६·८९	९·९६	७·९६=	७·९२
३०	७·५३	९·५४	९·४३	७·७९	११·०६	८·३२=	८·९८
३६	७·५८	९·३३	९·३८	८·२२	१२·४८	८·६३=	९·२७
४८	८·४५	९·५२	८·६३	८·८३	१०·६२	८·०५=	९·०२
६०	—	—	१०·१७	७·२५	१०·७०	५·५५=	८·४२



आकृती २५ = अल्फाल्फाचे एकरी उत्पादन व पाटाचे दिलेले पाणी यांचे विक्षेप–चित्र; तथा रेखीय व अरेखीय सम्बन्धदिक्–रेषा.

वरील न्यास आकृती २५ मध्ये चित्रांकित केला आहे. प्रांकित बिन्दू-करिता अन्वायोजित अशा दोन रेषा ह्या आकृतीत दाखविल्या आहेत. ह्यांपैकी एक सरळ रेषा असून तिचा समीकार र = ५·०३८+०·०८८६ य असा आहे. ह्या समीकारात 'र'ने एकरी टनात उत्पादन व 'य'ने पाटाच्या पाण्याची इंचात खोली दर्शविली जाते. ह्या दोन राशींतील सहसम्बन्ध जो वरील समीकाराद्वारे दर्शित होतो त्याची अर्हा द = ०·६८ अशी आहे.

आकृतीवरून हेही दिसून येईल की, प्रांकित बिन्दूकरिता सरल रेषेचे अन्वायोजन हे मुळी उत्तम अन्वायोजनच नव्हे ! अर्थात वरील 'द'ही अल्फाल्फाचे उत्पादन व पाटाच्या पाण्याच्या इंचातील खोलीचे यथार्थ सहसम्बन्ध-मापांक नव्हे !

आकृतीतील दुसरी रेषा अल्पतमवर्ग रीत्यनुसार अन्वायोजित द्वि-मात्रा एकेन्द्रवक्र आहे. त्या रेषेचा समीकार असा :

र = ३·५५ + ०·२५२ य−०·००२८१६ य²

आकृती २५ वरून स्पष्ट होईल की, सरलरेषेपेक्षा ह्या एकेन्द्र-वक्र द्वारा साधलेले अन्वायोजन हे उत्तम असून अधिक यथार्थ आहे. अधिक पाणी देण्याचा उद्देश आधिक उत्पादन मिळावे हा असतो. परन्तु हा उद्देश एका विशिष्ट मर्यादे-पर्यंतच सफल होतो. त्यानंतर अधिक पाणी दिल्यास उत्पादनात वाढ होण्याऐवजी ते कमी मात्र होऊं लागते. एकेन्द्र वक्रावरून हा बिन्दू कोणता हे समजते. सरल रेषेवरून हे चित्रण मुळीच शक्य नाही. आणि म्हणूनच वरील सारख्या न्यासातून सहसम्बन्धाप्रीत्यर्थ एकेन्द्र वक्राची योजना ही केव्हाही स्तुत्य व उपयुक्त ठरते. ह्या सहसम्बन्धाचे विचलन जे प्रमाप–विभ्रम त्याचे मोजमापही पूर्वीच्या प्रकरणातून वर्णन केलेल्या विधीप्रमाणे करावे. हा मापांक सारणी ३० मध्ये दिलेल्या विधी-प्रमाणे वास्तविक उत्पादनांक व एकेन्द्र–वक्र समीकारावरून गणित केलेल्या उत्पादनाच्या विचलनांच्या वर्गांच्या योगावरून मिळतो. अरेखीय सहसम्बन्धाच्या प्रमाप-विभ्रमाकरिता “ $धा_{र}$ ” हे चिन्ह उपयोगांत आणावे.

सारणी–३०

वास्तविक व संगणित अल्फाल्फा उत्पादनाची तुलना.

(१) दिलेले पाणी (इंचात) य	(२) वास्तविक उत्पादन र	(३) संगणित उत्पादन (ऐकेन्द्रावरून) $र_{ग}$	(४) विचलने (२—३) घ	(५) $घ^{2}$
०	३.८५	३.५५	+०.३०	०.०९००
०	५.९४	३.५५	+२.३९	५.७१२१
०	५.५२	३.५५	+१.९७	३.८८०९
०	२.७५	३.५५	—०.८०	०.६४००
०	२.८९	३.५५	—०.६६	०.४३५५
०	२.३५	३.५५	—१.२०	१.४४००
१२	४.७८	६.१६	—१.३८	१.९०४४
१२	७.५२	६.१६	+१.३६	१.८४९६
१२	६.५१	६.१६	+०.३५	०.१२२५
१२	४.३१	६.१६	—१.८५	३.४२२५
१२	५.८३	६.१६	—०.३३	०.१०८९
१२	४.८४	६.१६	—१.३२	१.७४२४
१८	७.०२	७.१७	—०.१५	०.०२२५
१८	५.६९	७.१७	—१.४८	२.१९०४
१८	८.०२	७.१७	+०.८५	०.७२२५
१८	६.४६	७.१७	—०.७१	०.५०४१
२४	६.००	७.९७	—१.९७	३.८८०९
२४	८.३८	७.९७	+०.४१	०.१६८१
२४	८.३२	७.९७	+०.३५	०.१२२५
२४	६.८९	७.९७	—१.०८	१.१६६४
२४	९.९६	७.९७	+१.९९	३.९६०१
२४	७.९६	७.९७	—०.०१	०.०००१
३०	७.५३	८.५७	—१.०४	१.०८१६
३०	९.५०	८.५७	+०.९७	०.९४०९
३०	९.४३	८.५७	+०.८६	०.७३९६
३०	७.९७	८.५७	—०.६०	०.३६००

(१) दिलेले पाणी (इंचात) य	(२) वास्तविक उत्पादन र	(३) संगणित उत्पादन (ऐकेन्द्रावरून) $र_ग$	(४) विवेचने (२–३)	(५) $घ^२$
३०	११·०६	८·५७	+२·४९	६·२००१
३०	८·३२	८·५७	–०·२५	०·०६२५
३६	७·५८	८·९७	–१·३९	१·९३२१
३६	९·३३	८·९७	+०·३६	०·१२९६
३६	९·३८	८·९७	+०·४१	०·१६८१
३६	८·२२	८·९७	–०·७५	०·५६२५
३६	१२·४८	८·९७	+३·५१	१२·३२०१
३६	८·६३	८·९७	–०·३४	०·११५६
४८	८·४५	९·१५	–०·७०	०·४९००
४८	९·५२	९·१५	+०·३७	०·१३६९
४८	८·६३	९·१५	–०·५२	०·२७०४
४८	८·८३	९·१५	–०·३२	०·१०२४
४८	१०·६२	९·१५	+१·४७	२·१६०९
४८	८·०५	९·१५	–१·१०	१·२१००
६०	१०·१७	८·५३	+१·६४	२·६८९६
६०	७·२५	८·५३	–१·२८	१·६३८४
६०	१०·७०	८·५३	+२·१७	४·७०८९
६०	५·५५	८·५३	–२·९८	८·८८०४
			+२४·२२ –२४·२१	८०·९८७१

$$म्हणून = धा_र = \sqrt{यो\ (घ^२)\ /\ डा.} \qquad (४९)$$

$$= \sqrt{८०·९८७१/४४}$$

$$= १·३६$$

सहसम्बन्ध–देशना

सरल-रेखीय सहसम्बन्धात त्याच्या मापांकास 'द' ही संज्ञा देतात; तर अरेखीय सहसम्बन्ध मापांकास 'दि' ही संज्ञा देतात. पूर्वीच्या प्रकरणातून वर्णन केल्याप्रमाणे, 'दि'–ची अर्हाही '$धा_र$' व '$धि_र$' वरून काढावी.

$$दि^२_{(रय)} = १ - \frac{धा_र^२}{धि_र^२} \qquad (५०)$$

'$धा_र$' ची अर्हा सारणी ३० वरून १·३६ येते. $धि_र$ची अर्हा नेहमीच्या विधीप्रमाणे संगणित केल्यास २·२७ अशी येते. म्हणून

$$दि_{(रय)} = \sqrt{१ - \frac{१·८४०६}{५·१७७}}$$

$$= ०·८०$$

प्रमाप–विभ्रम व सहसम्बन्ध–देशनाची वरील गणना ही नेहमीच्या परिपाठाप्रमाणे दीर्घ-विधीप्रमाणें केली आहे. परंतु हीच गणना प्रकरण ९ मधून वर्णन केल्याप्रमाणे फक्त अल्पतमवर्गरीतीप्रमाणे संगणनेवरून ज्या अर्हा येतात त्याच वापरून करणेही शक्य आहे. सारणी २९ वरून एकेन्द्राकरिता परंतु प्रमाप–विभ्रम व सहसम्बन्ध–देशनाच्या गणनेसाठी आवश्यक अशा ज्या संगणित अर्हा येतात त्या अशा.

$क = ३·५४६८$ $\qquad$ $धी\ (य^२·र) = ४०७४४८·००$

$ख = ०·२५२०$ $\qquad$ $ग_र^२ = ५५·९५०४$

$ग = -०·००२८१६२$

$धी\ (र) = ३२९·०३$ $\qquad$ $धी\ (य^२) = २६८८·३१२९$

$धी\ (यर) = १०२६९·९६$ $\qquad$ $डा = ४४.$

द्वि. मात्रा एकेन्द्राच्या प्रमाप–विभ्रम–सूत्रात ह्या अर्हा समाविष्ट केल्यास

$$धार^२ = \frac{धी\ (य^२) - क·धी\ (र) - ख.\ धी\ (यर) - ग·धी\ (य^२र)}{डा.} \qquad (५१)$$

$$= \frac{२६८८·३१२९-(३·५४६८\times३२९·०३)-(०·२५२०\times१०२६९·९६)}{४४}$$

$$- \frac{(-०·००२८१६२\times४०७४४८·००)}{४४}$$

$$= \frac{८०·७३४५}{४४} = १·८३४९$$

$$\therefore\ धा_र = १·३६$$

द्वि–मात्रा एकेन्द्राकरिता सहसम्बन्ध–देशनाचे संगणन येणेप्रमाणे करावे—

$$दि^{२}_{(रय)} = \frac{क\cdot धी(र) + ख\cdot धी(यर) + ग\cdot धी(य^{२}र) - डा\cdot ग_{र}^{-२}}{धी(र)^{२} - डा.\, ग_{र}^{२}} \quad (५२)$$

$$= \frac{१४५\cdot ७६०८}{२६८८\cdot ३१२९ - (४४ \times ५५\cdot ९५०४)}$$

$\therefore दि_{(रय)} = ०\cdot ८०.$

सहसम्बन्ध–निष्पत्ती

सहसम्बन्ध सरल–रेखीय असेल तर 'द'–ने त्याचे मापन होते. सहसम्बन्ध अरेखीय असेल तर 'दि'–ने त्याचे मापन होते. अरेखीय सहसम्बन्धाच्या मापना-साठी **कार्ल पिअर्सने** आणखी एक मापांक प्रसृत केले आहे. त्या मापांकास सहसम्बन्धनिष्पात्ति' (रि) असे म्हणतात. सहसम्बन्ध–निष्पत्तीचे सूत्र असे :

$$रि = \sqrt{१ - \frac{धि^{२}_{(क\cdot र)}}{धि_{र}^{२}}} \quad (५३)$$

ज्यात $धि_{(कर)}$ = अनेक अर्हांचे माध्याभोवतीचे प्रमाप–विचलन.

सहसम्बन्ध सरल–रेखीय असल्यास वरील माध्य सरळ रेषेशी जुळतील. 'रि' व 'द' हे मग समान असतील. त्याचप्रमाणे, सरल–रेखीय सहसम्बन्धात 'दि' व 'द' हेही समान अर्हांचेच असतात. म्हणून—

$$दि = द = रि$$

परंतु सहसम्बन्ध जर अरेखीय असेल तर रि > दि > द. म्हणजे अरेखीय सह-सम्बन्धात 'रि' हा 'दि'–पेक्षा केव्हाही मोठा असतो. ह्यांवरून सहसम्बन्धादिक्–रेखीयतेकरिता खालील समान्विक्षा योजिली आहे.

$$लि = रि^{२} - द^{२} \quad (५४)$$

ज्यांत लि = रेखीयतेची समान्विक्षा.

'लि'ची अर्हा शून्य असल्यास सम्बन्धादिक् रेखीय समजावे. 'लि'ची अर्हा शून्य नसल्यास सम्बन्धादिक् अरेखीय समजावे.

बहुगुण-सहसम्बन्ध

फक्त दोनच राशींतील सहसम्बन्धाची आपण आतापर्यंत चर्चा केली. आर्थिक, सामाजिक, भौगोलिक,आदिसारख्या क्षेत्रांतून फक्त दोनच चलांचे सहसम्बन्ध सहसा आढळून येत नाहीत. इतर अनेक अवांतर कारणे सुद्धा त्यात अंतर्भूत झालेली असतात. परंतु दोन राशींपुरता विचार करताना इतर कारणे अस्तित्वात नाहीत असेच आपण थोडा वेळ धरून चालतो. अल्फाल्फाच्या वरील उदाहरणात उत्पादनात व पाण्याच्या राशीत काय सम्बन्ध आहे एवढेच आपण पाहिले. खरे पाहता, ही वस्तुस्थिती नाही. अल्फाल्फाचे उत्पादन पाटाच्या पाण्याबरोबरच पाऊस उष्णतामान इत्यादींवरही अवलंबून असते.याकरिता या सर्व कारकावर सहसम्बन्धात एकसमयावच्छेदेकरून अभ्यास होऊ शकेल अशी रीती शोधून काढावयास हवी.

बहुगुण-सहसम्बन्ध ही अशी रीती होय. राहिलेल्या एका कारकावर इतर सर्व कारकांचा एकूण परिणाम काय होतो हे सदर रीतीप्रमाणे तपासता येते. पूर्वीच्या प्रकरणातून वर्णन केलेल्या अल्पतमवर्गरीतीबरहुकूमच अनेक चलांतील सहसम्बन्धाचेही मापन होते.

सारणी–३१

१८९० ते १९२२ दरम्यान कानूसस् येथील मक्याचे एकरी उत्पन्न व उष्णतामान—

वर्ष	वास्तविक उत्पन्न (बुशेलमध्ये)	संगणित उत्पन्न (बुशेलमध्ये)	वास्तविकाच्या प्रतिशत-प्रवृत्ती अर्हा ($य_1$)	जून ($य_2$)
१८९०	१५.६	२२.४	६९.६	७७.६
१८९१	२६.७	२२.२	१२०.३	७०.७
१८९२	२४.५	२२.१	११०.९	७३.४
१८९३	२१.३	२१.९	९७.३	७४.७
१८९४	११.२	२१.८	५१.४	७४.२
१८९५	२४.३	२१.६	११२.५	७१.७
१८९६	२८.२	२१.५	१३०.२	७४.१
१८९७	१८.०	२१.३	८४.५	७६.६
१८९८	१६.०	२१.२	७५.५	७५.०
१८९९	२७.०	२१.०	१२८.६	७३.९
१९००	१९.०	२०.९	९०.९	७४.९
१९०१	७.८	२०.७	३७.७	७७.३
१९०२	२९.९	२०.६	१४५.१	७०.९
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

वर्ष	वास्तविक उत्पन्न	संगणित उत्पन्न	वास्तविकाच्या प्रतिशत-प्रवृत्ती अहां ($य_1$)	जून ($य_2$)
	(बुशेलमध्ये)			
१९०६	२८·९	२०·०	१४४·५	७१·८
१९०७	२२·१	१९·८	१११·६	७२·०
१९०८	२२·०	१९·७	१११·७	७२·१
१९०९	१९·९	१९·५	१०२·१	७३·१
१९१०	१९·०	१९·४	९७·९	७२·२
१९११	१४·५	१९·२	७५·५	८०·५
१९१२	२३·०	१९·१	१२०·४	६९·३
१९१३	३·२	१८·९	१६·९	७४·२
१९१४	१८·५	१८·८	९८·४	७८·२
१९१५	३१·०	१८·६	१६६·७	६९·२
१९१६	१०·०	१८·५	५४·१	७०·३
१९१७	१३·०	१८·३	७१·०	७२·८
१९१८	७·१	१८·२	३९·०	७८·४
१९१९	१५·२	१८·०	८४·४	७२·३
१९२०	२९·५	१७·९	१४८·०	७२·८
१९२१	२२·२	१७·७	१२५·४	७४·४
१९२२	१९·३	१७·६	१०९·७	७५·२

उत्पन्नांक बुशेलमध्ये असून, जून, जुलै, ऑगस्टचे उष्णतामानाचे अंक हे त्या महिन्याचे सर्वसाधारण माध्यांक आहेत. सरल-रेखीय प्रवृत्ति–निदर्शक रेषेच्या अन्वायोजनाद्वारे आलेल्या उत्पन्नाच्या संगणित–अर्हा वरील सारणीतील स्तंभ ३ मध्ये दिल्या आहेत.

धान्याचे दर एकरी उत्पन्न हे त्या धान्याच्या वाढीच्या काळातील उष्णतामानावर अवलंबून असते. वाढीच्या ह्या काळातील काही महिने हे इतरांपेक्षा अधिक महत्त्वपूर्ण असतात आणि म्हणूनच उत्पन्न व उष्णतामानातील हा संबंध प्रत्येक महिन्याकरिता असा वेगवेगळा काढला आहे. त्याकरिता, जून, जुलै व ऑगस्टचे आवश्यक समीकार असे:

$$(१)\ य_{१} = क + ख_{१२} \cdot य_{२}$$

$$(२)\ य_{१} = क + ख_{१३} \cdot य_{३}$$

$$(३)\ य_{१} = क + ख_{१४} \cdot य_{४}$$

ह्या समीकारातील "$य_{१}$" म्हणजे वास्तविक उत्पन्नाची संगणिताशी येणारी प्रतिशत अर्हा असून $य_{२}$, $य_{३}$ आणि $य_{४}$ म्हणजे जून, जुलै व ऑगस्टचे निरपेक्ष उष्णतामान होय. "$य_{१}$" ह्यास परतंत्र–चल समजावे; $य_{२}$, $य_{३}$ आणि $य_{४}$ हे स्वतंत्र-चल समजावे. क व ख हे पूर्वी वर्णन केल्याप्रमाणे अचल व रेषा उतार दर्शवितात. ख = या पादाक्षराने परतंत्र चलाचे कोणत्या स्वतंत्र चलाशी संविधान आहे हे दर्शविले जाते.

वरील प्रसामान्य–समीकार हे सारणी ३० मधील न्यासाधारे सोडविल्यास खालील परिणाम येतात :

$य_{१} = ५२२{\cdot}३१ - ५{\cdot}७४३ य_{२}$ ....$धा_{१२} = ३०{\cdot}२२$; $दा_{१२} = -\ ०{\cdot}४८१$

$य_{२} = ८२७{\cdot}६४ - ९{\cdot}३०२ य_{३}$ ....$धा_{१३} = २४{\cdot}७३$; $दा_{१३} = -\ ०{\cdot}६९७$

$य_{३} = ५१७{\cdot}८६ - ६{\cdot}०९८ य_{४}$ ...$धा_{१४} = २९{\cdot}९८$; $दा_{१४} = -\ ०{\cdot}४९४$

(२) ह्या तीनही स्वतंत्र चलांचा एकसमयावच्छेदेकरून होणारा परिणाम लक्षात घेता उत्पन्नातील व उष्णतामानातील संबंध खालील सम्बन्धदिक् समीकारावरून ध्यानात येईल.

$$य_{१} = क + ख_{१२.३४}\, य_{२} + ख_{१३.२४}\, य_{३} + ख_{१४.२३}\, य_{४} \quad (५५)$$

ह्या समीकारांतील "ख" च्या पादाक्षरांचे दोन भाग पडतात. आवर्तकालाच्या आधीच्या पादाक्षरास 'प्राथमिक–पादाक्षर' असे म्हणतात. आवर्तकालाच्या नंतरच्या पादाक्षरास 'गौण पादाक्षर' असे म्हणावे.

पूर्वी वर्णन केल्याप्रमाणे (प्रकरण ९) वरील सम्बन्धादिक् समीकार सोडविण्याकरिता प्रसामान्य अशा समीकारांची आवश्यकता आहे. सदर समीकारांत निरपेक्ष–अर्हांऐवजी समान्तर–मध्यकेपासूनची विचलने घेतल्यास चारांऐवजी तीनच समीकार सोडवावे लागतील; कारण माध्यापासूनची विचलने घेतल्यास वरील समीकारातील "क"–अर्हा मुक्त होते. मध्यक–गुणनफलाकरिता योग्य त्या संज्ञा वापरल्यास हे तीन्ही समीकार खालीलप्रमाणे होत.

$$(१)\ त_{१२} = ख_{१२.३४}\ धि_{२}^{२} + ख_{१३.२४}\ त_{२३} + ख_{१४.२३}\ त_{२४}$$

$$(२)\ त_{१३} = ख_{१२.३४}\ त_{१२} + ख_{१३.२४}\ धि_{३}^{२} + ख_{१४.२३}\ त_{३४}$$

$$(३)\ त_{१४} = ख_{१२.३४}\ त_{२४} + ख_{१३.२४}\ त_{३४} + ख_{१४.२३}\ धि_{४}^{२}$$

समयामिक रीतीने हे समीकार सोडविल्यास $ख_{१२.३४}$, $ख_{१३.२४}$ आणि $ख_{१४.२३}$ च्या अर्हा येतील. त्यानंतर त्यांतील प्रमाप–विभ्रमाचे आगणन खालील सूत्रद्वारे शक्य आहे.

$$धा^{२}_{१.२३४} = धि_{१}^{२} - ख_{१२.३४}\ त_{१२} - ख_{१३.२४}\ त_{१३} - ख_{१४.२३}\ त_{१४}$$

आणि बहुगुण सहसम्बन्धाचा मापांक "दा" हा खालील सूत्रावरून मिळतो.

$$दा^{२}_{१.२३४} = \frac{ख_{१२.३४}\ त_{१२} + ख_{१३.२४}\ त_{१३} + ख_{१४.२३}\ त_{१४}}{धि_{१}^{२}} \quad (५६)$$

हे सर्व समीकार सोडविण्यासाठी ज्या समंकांची आवश्यकता आहे, ते सारणी ३० मधील न्यासाधारे गोळा केल्यास खालील अर्हा येतात.

$धी\ (य_{१}) = ३२९८\cdot१$ $\qquad$ $धी\ (य_{१})^{२} = ३६८८४६\cdot६७$

$धी\ (य_{२}) = २४२६\cdot९$ $\qquad$ $धी\ (य_{२})^{२} = १७८७५५\cdot७५$

$धी\ (य_{३}) = २५८१\cdot५$ $\qquad$ $धी\ (य_{३})^{२} = २०२१६३\cdot७९$

$धी\ (य_{४}) = २५५३\cdot८$ $\qquad$ $धी\ (य_{४})^{२} = १९७८९०\cdot३२$

$धी\ (य_{१}\ य_{२}) = २४०९६७\cdot२२$

$धी\ (य_{१}\ य_{३}) = २५५९५४\cdot११$

$धी\ (य_{१}\ य_{४}) = २५३६६४\cdot८५$

$धी\ (य_{२}\ य_{३}) = १८९९४१\cdot८३$

$धी\ (य_{२}\ य_{४}) = १८७९०९\cdot३८$

$धी\ (य_{३}\ य_{४}) = १९९८४५\cdot००$

$ग_{१} = धी\ (य_{१})\ /\ हा$

$= ९९\cdot९४२४$

$ग_1^2 = ९९८८.४८३३$

$ग_2 = ७३.५४२३$ $ग_2^2 = ५४०८.४८४६$

$ग_3 = ७८.२२७३$ $ग_3^2 = ६११९.५१०५$

$ग_4 = ७७.३८३९$ $ग_4^2 = ५९८८.८८७१$

गोळा केलेल्या ह्या अर्हांवरून, प्रकरण ९ मध्ये दिल्याप्रमाणे वरील तीन्ही समीकार सोडविण्यासाठी आवश्यक अशा 'त–धिच्या' अर्हा काढता येतील. ह्या येणाऱ्या अर्हा त्या तीन्ही समीकारांत समाविष्ट केल्यास येणारे परिणाम असे :

(१) –४७.९६७ = ८.३५६४ ख१२.३४ + २.७९० ख१३.२४ + २.९३२ ख१४.२३

(२) –६२.०३९ = २.७९० ख१२.३४ + ६.६६४५ ख१३.२४ + २.०६३ ख१४.२३

(३) –४७.५११ = २.९३२ ख१२.३४ + २.०६३ ख१३.२४ + ७.७८९ ख१४.२३

सदर समीकार समयामिक रीतीने सोडविल्यास;

ख१२.३४ = – २.०९५, ख१३.२४=–७.३९४ आणि,ख१४.२३=–३.३५४ अशा अर्हा येतात. आलेल्या ह्या अर्हा मूळ समीकारात समाविष्ट केल्यास क = १०९१.९५ अशी अर्हा येते.

म्हणून मूळ–अर्हात सम्बन्धदिक् रेषेचा समीकार असा :

$य_1 = १०९१.९५ - २.०९५य_2 - ७.३९४य_3 - ३.५४४य_4$

ह्या सम्बन्धदिक् रेषेचा प्रमाप–विभ्रम दिलेल्या सूत्रावरून येतो तो असा :

$धा^2_{१.२३४} = ४७०.१३७$

$\therefore धा_{१.२३४} = २१.६८$

आणि, बहुगुण सहसम्बन्धाचे मापांक 'दा'; पूर्वी दिलेल्या सूत्रावरून येते, ते असे :–

$दा^2_{१.२३४} = ०.६०५२८४$

$\therefore दा_{१.२३४} = ०.७७८$

बहुगुण सहसम्बन्ध हा एक परतंत्र चल व अनेक एकत्रित अशा स्वतंत्र चलातील संबंधाचा देशना होय. तो संबंध 'दा' ह्या संज्ञेने दर्शवितात. 'दा' ह्या संज्ञेस अधिक अथवा उणे चिन्ह जोडता येत नाही. त्यामुळे कोणत्या स्वतंत्र चलांचा परतंत्र चलाशी अस्तिपक्षी संबंध आहे व कोणत्या चलाशी नास्तिपक्षी संबंध आहे हे ठरविता येणार नाही. त्याकरिता त्या सम्बन्धाची व्याख्या शुद्ध सम्बन्धादिक् समीकारांतील अचलांच्या चिन्हांवरून ठरवावी.

सारणी ३० मधील न्यासाच्या बाबतीत अशा तऱ्हेच्या स्वतंत्र चलांच्या संयुक्त परिणामामुळे वाढ झाली. हे 'दा' व 'द' च्या अर्हा तपासल्यास कळून येईल.

बहुगुण सहसम्बन्ध रेखीय असल्यासच वरील निष्कर्ष सत्य समजावे. सह-सम्बन्ध अरेखीय असेल तर येणाऱ्या परिणामात किंचित न्यूनत्व आढळून येईल एवढेच कारण वरील तऱ्हेच्या सम्बन्धादिक् समीकारावर आधारित आगणक हे अशा परिस्थितीत सत्यतेचे यथार्थ चित्रण करीत नाहीत. त्याचप्रमाणे, त्यांचे विचरण सदर बाबतीत रेखीयसम्बन्धापेक्षा अधिक असते.

आंशिक सहसम्बन्ध :–

जून, जुलै व ऑगस्टच्या संयुक्त उष्णतामानाचा कान्सास् येथील मक्याच्या उत्पादनावर काय परिणाम होतो व तो कसा काढायचा हे आपण वर पाहिलेच ! परन्तु ह्या तीन स्वतंत्र चलांपैकी फक्त एकच म्हणजे जुलै उष्णतामानाचा उत्पन्नावर काय परिणाम होतो एवढेच तपासावयाचे असल्यास ज्या सहसम्बन्ध-विधीचा उपयोग करतात त्यास आंशिक सहसम्बन्ध विधी असे म्हणतात. अशा वेळेस इतर स्वतंत्र चल तात्पुरती अचल आहेत असे समजावे.

(१) नुसताच मक्याचे उत्पन्न व जुलै उष्णतामानातील सम्बन्ध हवा असल्यास तो वर उद्धृत केल्याप्रमाणे : द१ ३४ = –०·६९७ असा आहे.

(२) जून, जुलै व ऑगस्ट उष्णतामानाचा संयुक्त प्रभाव उत्पन्नावर काय आहे हेही आपण तपासले. तो संबंध दा१·२३४=०·७७८ असा आहे.

(३) जून व ऑगस्टचे उष्णतामान अचल ठेवून जुलै उष्णतामानाचा उत्पन्नाशी काय सम्बन्ध आहे हे पाहावयाचे असल्यास पूर्वीच्या परिच्छेदांतून वर्णन केल्याप्रमाणे हा प्रश्न प्रसामान्य समीकाराचे आधारेच सोडवावयास हवा.

वर म्हटल्याप्रमाणे येथेही चार प्रसामान्य समीकारांचीच आवश्यकता आहे. परन्तु माध्याच्या उपयोगाने ते समीकार तीनांतच प्रह्रसित होतात. हे तीन समीकार असे :–

(१) त१३ = धि·१^{2} ख३१·२४ + त१२· ख३२·१४ + त१४·ख३४·२१

(२) त२३ = त१२·ख३१·२४ + धि२·^{2} ख३२·१४ + त२४·ख३४·२१

(३) त ३४ = त१४· ख३१·२४ + त२४· ख३२·१४ + धि४·^{2} ख३४·२१

ह्या समीकारांतून समाविष्ट करण्यासाठी आवश्यक अशा अर्हा बहुगुण सहसम्बन्धाच्या प्रकरणात शोधून काढल्याच आहेत. धि$_{1}^{2}$ ची अर्हा (३४·७७७)^{2} अशी आहे. ह्या सर्व अर्हांवरील समीकारांतून समाविष्ट केल्यास येणारे फल असे :–

$$(१)\ -६२.०३९ = ११८८.६८८\ ख३१.२४ + (-४७.९६७\ ख३२.१४) -४७.५१९\ ख३४.२१$$

$$(२)\ २.७९० = -४७.९६७\ ख३१.२४ + ८.३५६४\ ख३२.१४ + २.९३२\ ख३४.२१$$

$$(३)\ २.०६३ = -४७.५१९\ ख३१.२४ + २.९३२\ ख३२.१४ + ७.७८९३\ ख३४.१२$$

हे समीकार समयामिक विधीने सोडविल्यास

ख३१.२४ = − ०.०५३१

ख३२.१४ = + ०.०५७४

ख३४.२१ = − ०.०८०७ अशा अर्हा प्राप्त होतात.

बहुगुण–सहसम्बन्धाद्वारे प्राप्त झालेली 'ख'ची अर्हा: ख १३.२४ = − ७.३९४ अशी आहे. ही अर्हा खालील सूत्रांत समाविष्ट केल्यास येणारे फल असे:—

$$द१३.२४ = \sqrt{ख१३.२४ \times ख३१.२४}$$
$$= \sqrt{-७.३९४ \times -०.०५३१}$$
$$= -०.६२६६$$

जून व ऑगस्टचे उष्णतामान अचल ठेवून जुलैचे उष्णतामान व मक्याचे एकरी उत्पादनात येणारा सहसम्बन्ध वरील मापांकाने दर्शविला जातो.

आंशिक सहसम्बन्ध हा बहुशः सूत्रावरूनच निश्चित करतात. दोन चलांतील सहसम्बन्धास 'शून्यवर्गाचा सहसम्बन्ध' असे म्हणतात; आणि त्यावरून सूत्राधारे 'प्रथम–वर्गाचे सहसम्बन्ध' निश्चित करावे. उदाहरणार्थ,

$$(अ)\ द१२.३ = \frac{द१२ - द१३ \cdot द२३}{(१ - द१३^{२})^{\frac{१}{२}}\ (१ - द^{२}२३)^{\frac{१}{२}}} \qquad (५७)$$

ह्या प्रथमवर्गाचे सहसम्बन्धावरून दुसऱ्या वर्गाचे सहसम्बन्ध ही सूत्राधारेच निश्चित करतात.

$$(ब)\ द१२.३४ = \frac{द१२.३ - द१४.३ \times द२४.३}{(१ - द^{२}१४.३)^{\frac{१}{२}}\ (१ - द^{२}२४.३)^{\frac{१}{२}}} \qquad (५८)$$

वगैरे.

प्रकरण ११

गुणातील सहसम्बन्ध

प्रकरण ९ व प्रकरण १० मधून ज्या सहसम्बन्धाचा आपण विचार केला, त्या सर्व सम्बन्धाचे विवरण इयत्तात्मक न्यासात आहे. प्रत्येक पदाची लक्षणे जी इयत्तात्मक अर्हांत मोजणे शक्य आहे, अशा दोन अथवा अधिक पदांतील सम्बन्ध कसा संगणित करायचा हे त्यात आपण पाहिले, परन्तु काही पदांची लक्षणे अशी असतात की, ती इयत्तात्मक अर्हांत रूपान्तरित होऊच शकत नाहीत.

उत्पत्तिशास्त्र, वंशशास्त्र, आदि शास्त्रांतील पदांचे वर्गीकरण इयत्तात्मक असण्यापेक्षा लक्षणात्मकच असते. उदाहरणार्थ, उत्पत्तिशास्त्रान्तर्गत मानवाचे वर्गीकरण त्याच्या केसाच्या रंगावरून काळा—करडा; अथवा डोळ्याच्या रंगावरून काळा-निळा असेच केले जाते. वंशशास्त्रातून सुद्धा अशा गुणावगुणावरच हे भेद कायम करण्यात येतात. उंच व बुटका पीतवर्णीय व श्वेतवर्णीय, ही लक्षणे इयत्तात्मकापेक्षा मुख्यतः लक्षणात्मकच समजावी. जपानी हे युरोपियनांपेक्षा बुटके असतात, ह्या आपल्या विधानाचा मुख्य भर त्यांच्या वंशवाढीतील लक्षणावरच असतो.

प्रसिद्ध उत्पत्तिशास्त्रज्ञ मेंडेलच्या प्रयोगान्तर्गत वाटाण्यातील भेदाभेदही लक्षणात्मकच समजावा. दोन प्रकारच्या फुलांतील सहसम्बन्धाची भावनाही अशाच प्रकारच्या गुणावगुणांच्या लक्षणावरच अवलंबून असते. कडू गोड, काळा गोरा, उंच बुटका, अशा लक्षणात्मक जोड्या अस्ति व नास्ति पक्षी नमूद केल्यास दोन्ही प्रकार एका चतुरंक सारणीत मांडणे शक्य आहे.

उंचीतील व वजनातील सहसम्बन्ध हा इयत्तात्मक रीतीने प्रस्थापित करता येईल. त्याचप्रमाणे हलका अथवा वजनदार किंवा बुटका अथवा उंच ह्या तऱ्हेनेही हे संभाजन शक्य आहे. खाली दिलेल्या **चतुरंक-सारणीत** निदर्शनान्तर्गत व्यक्तींचे लक्षणानुसार संभाजन केल्यास त्या दोन लक्षणांतील सहसम्बन्ध काय आहेत हे निश्चित करता येईल.

	बुटका	उंच	एकूण
हलका — — —	क	ख	— —
वजनदार — — —	ग	घ	— —
एकूण — — —	—	—	डा.

क, ख, ग, घ–ने नमूद केलेली लक्षणे असणाऱ्या किती व्यक्ती आहेत हे वरील सारणीद्वारा दर्शविले जाते.

वरील लक्षणातील सहसम्बन्ध जर परिपूर्ण असेल तर सर्वच पदे फक्त दोनच कोशातून आढळून येतील. थोडक्यात, सर्व उंच व्यक्ती वजनदार आढळून आल्या व बुटक्या व्यक्ती हलक्या आढळल्या तर फक्त 'क' व 'घ' च्याच कोशा तेवढ्या पूर्ण व, ख–ग च्या कोशा संपूर्णता रिकाम्या आढळतील. परन्तु सामान्यत: असे असत नाही. म्हणूनच न्यासांतील सर्व पदे चारही कोशांतून समान वा असमान-रीत्या वंटित झालेली आढळून येतील.

दोनांपेक्षा अधिक लक्षणे असलेला न्यासही खालील बहुगुण सारणीयनात मांडता येणे शक्य आहे.

	क'	ख'	ग'	घ'	एकूण
क					
ख					
ग					
घ					
	एकूण				डा.

लक्षणातील संबंध जर पूर्ण असेल तर सर्व पदे वरील सारणीतल्या कर्ण रेषेतील कोशातूनच आढळून येतील. संबंध जर पूर्ण नसेल तर हीच पदे सामान्यतः सर्व कोशातून विखुरलेली आढळतील.

तथ्याच्या ह्या आधारावरच्च गुणातील सम्बन्धाचा मापांक ठरविणे, व त्याचे गणित करणे शक्य आहे.

संभावना–मापांक

सारणीतील वास्तविक पदे व नमूद केलेल्या कारणांच्या अवसरामुळे उद्भवणाऱ्या संभावी पदांच्या तुलनेवरून हा संबंध प्राप्त होतो.

दिलेल्या रांगेतील पदें '$ड_{द}$'; स्तंभातील पदे '$ड_{ग}$'; व कोशातील पदे '$ड_{दग}$' मानल्यास—

$$\left(ड_{दग} - \frac{ड_{द} \times ड_{ग}}{डा} \right) \qquad (५९)$$

हा वास्तविक व अवसरामुळे प्राप्त होणाऱ्या पदांतील फरक होय.

परन्तु वरील अर्हेच्या वर्गाची सैद्धान्तिक पदांच्या एकूण संख्येशी येणारी निष्पत्ती म्हणजे $क्ष^{२}$— होय.

$$क्ष^{२} = \left[\frac{\left(ड_{दग} - \frac{ड_{द} \times ड_{ग}}{डा} \right)^{२}}{\frac{ड_{ग} \times ड_{द}}{डा}} \right] \qquad (६०)$$

ह्या $क्ष^{२}$—ला ‘ डा ’—ने भागल्यास पिअर्सनचा $ए^{२}$ प्राप्त होतो.

$$ए^{२} = \frac{क्ष^{२}}{डा}$$

ह्यावरून संभावना – मापांकाचे सूत्र असे:—

$$गा.\ गा = \sqrt{\frac{ए^{२}}{१+ए^{२}}} = \sqrt{\frac{क्ष^{२}}{डा + क्ष^{२}}} \qquad (६१)$$

युलेने ह्याचे सुगम सरलित रूप दिले आहे, ते असे—

$$गा = \sqrt{\frac{धा-डा}{धा}} \qquad (६२)$$

ज्यात $$धा = धी \left(\frac{ड^{२}_{दग}}{ड_{द} \times ड_{ग}/डा} \right) \qquad (६३)$$

किंवा...

$$धा = डा \cdot धी \left(\frac{ड^{२}_{दग}}{ड_{ग} \times ड_{द}} \right) \qquad (६४)$$

संगणना—विधी.

(१) प्रत्येक कोशातील अर्हांचा वर्ग करा. ($ड^{२}_{दग}$)

(२) प्रत्येक बॉक्सकरिता रांगेतील व स्तंभातील अंकांचा गुणाकार करा.

(३) प्रत्येक पेटीतील अर्हेच्या वर्गास ($ड^{२}_{दग}$) संवादी अशा ($ड_{द} \times ड_{ग}$) ने भागा.

(४) सर्व रांगेतील पदांचा योग घेऊन त्यास ' डा ' (एकूण पदसंख्येने) भागा. येणारी अर्हा ही ' धा'ची अर्हा होय.

(५) $गा = \sqrt{\frac{धा - डा}{धा}}$ मध्ये वरील अर्हा ऐवजी ठेवून परिणाम काढा.

चतुरंक-सारणी (२ × २ संभाजन)

जेव्हा दोन चलक आस्ति व नास्ति अशा वैकल्पिक प्रकारांत संभाजित केले जातात, तेव्हा युलेचा हा संभाग-मापांक खालील सूत्रावरून मिळतो.

$$था = \frac{क. घ - ख. ग.}{क. घ + ख. ग.} \qquad (६५)$$

व (Coefficient of Colligation) म्हणजे संकलन. मापांक

$$ओ = \frac{\sqrt{क. घ} - \sqrt{ख ग}}{\sqrt{क. घ} + \sqrt{ख. ग}} \qquad (६६)$$

ज्यात क, ख, ग व घ हे अनेक कोशांतील वारंवारता होत.

क	ख
ग	घ

दिलेल्या लक्षणातील संबंध जर परिपूर्ण असेल तर सर्व पदे ' कघ ' अथवा ' खग ' पेटीत एकत्रित झालेली आढळून येतील. त्यामुळे ' था ' व ' ओ ' दोन्हीही + १·०० अथवा – १·०० बरोबर आढळून येतील. दिलेल्या लक्षणात कसलाच संबंध नसेल तर पदांचे बंटन समान (क=ख=ग=घ) असेल; व मग ' था ' व ' ओ ' हे शून्य असतील.

पिअर्सनची कोटिज्या रीती.

चतुरंक सारणीकरिता कोटिज्या रीतीप्रमाणे सहसम्बन्ध मापांक खालील सूत्रावरून प्राप्त होतो.

$$\text{द} = \text{कोज्या}\ \frac{\sqrt{\text{ख ग}}}{\sqrt{\text{क·घ}} + \sqrt{\text{ख·ग}}} \times \text{प्या} \qquad (\text{६७})$$

सदर मापांक द=० ते द=१·०० ह्या सीमेतच बदलत असतो. संबंध परिपूर्ण असेल तर वारंवारता फक्त दोनच आयतांतून आढळेल (क अथवा घ; किंवा ख अथवा ग); आणि मग $\sqrt{\text{क·घ}} = \sqrt{\text{क·घ} - \text{ख·ग}}$ ची अर्हा शून्य होईल व द ची किंमत १·०० असेल. पदांचे वंटन समान असल्यास (क=ख=ग=घ) प्रत्येक प्रभाग ०·५० असेल आणि मग 'द' ची अर्हा शून्य असेल.

एका चलाचे जेव्हा दोनच विभाग शक्य असतात, पण दुसऱ्या चलाकरिता अनेक संभाग शक्य होतात, तेव्हा २×ड सारणीचा उपयोग होतो. अशा वेळेस अर्ध-क्रमिक संबंधाची गणना करावी. ह्या विधीतील लक्षणाचे संभाजन हे सामान्यतः प्रसामान्य असे मानण्यांत येते.

ह्याकरिता उपयोगात येणारे सूत्र असे :–

$$\text{अर्ध-क्रमिक : द} = \frac{(\bar{\text{य}}_{\text{त}} - \bar{\text{य}}_{\text{थ}})\ \text{तथ}}{\text{धि} \times \text{०·३९८५ ज}} \qquad (\text{६८})$$

ज्यात,

$\bar{\text{य}}_{\text{त}}$=त–प्रकारांची मध्यक–अर्हा

$\bar{\text{य}}_{\text{थ}}$=थ–प्रकारांची मध्यक–अर्हा

त=त–प्रकारातील प्रातिशत–पदे

थ=थ–प्रकारातील प्रातिशत–पदे

धि=त व थ चे संयुक्त प्रमाप–विचलन

ज=प्रसामान्य–वक्रातील माध्यापासूनचे अन्तर, आधि क $\frac{\text{त-थ}}{\text{२}}$ वक्राचे क्षेत्रफळ असलेल्या एकूण अंतरावरील कोटी-अक्षाची उंची.

प्रकरण १२

प्रसामान्य–वक्र

कोणत्याही कृत्याचा परिणाम जेव्हा दोनपैकी एका प्रकारे घडून येतो, आणि अशा तऱ्हेचे पुष्कळ परिणाम असतात; तेव्हा ते सर्व परिणाम साधारणतः दोन भागांत विभाजित होतात. त्या दोहोंपैकी एक परिणाम अनुकूल अथवा इष्ट व दुसरा प्रतिकूल असा असतो. फक्त अनुकूल परिणाम मोजून व त्याप्रमाणे त्यांची नोंद करून एकूण कृत्यांची निश्चिती होऊ शकते.

एखादे नाणे घेतले व टिचकी मारून ते हवेत उडविले तर शक्य आहे की ते "चीत" पडेल.

अशा तऱ्हेच्या कृत्यांच्या विश्लेषणाने संभावितेच्या रूपाची कल्पना येईल आणि निदर्शन नियमाची जाणीव होईल. 'चीत' किंवा 'पट' हे दोनच पर्याय शक्य असल्याने, ह्या बाबतीत अनुकूल परिणामांची संभाविता.

त = $\frac{1}{2}$ अशी आहे.

किंवा त = क / डा असेही म्हणता येईल.

ज्यात क = अनुकूल परिणामांची शक्यता.

डा = शक्य असे एकूण परिणाम.

त = अनुकूल परिणामांची संभाविता.

सर्वसाधारण असे म्हणता येईल की जर एखादे कृत्य 'क' तऱ्हेने होणे शक्य आहे; व 'ख' तऱ्हेने होणे शक्य नाही; तर मग त्या कृत्यातील शक्य परिणाम घडून येण्याची संभाविता

त = क / क + ख = क / डा होय.

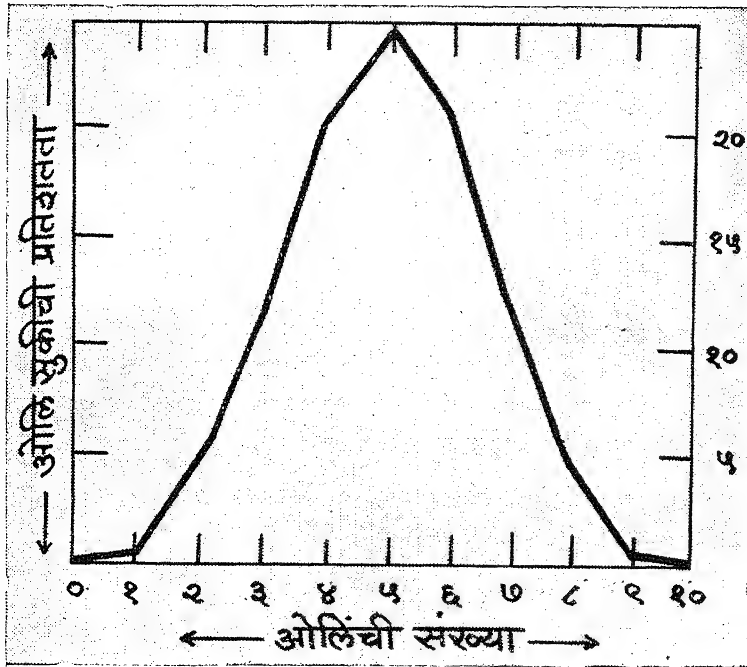
ज्यात क + ख = डा असतो.

त्याचप्रमाणे, त्या कृत्यातील प्रतिकूल परिणामांची संभाविताही थ = ख / डा होय. ज्यात ख = संभव असे प्रतिकूल परिणाम.

थ = प्रतिकूलांची संभाविता.

'चीत–पट' करिता एक नाणे शंभर वेळा टिचकी मारून उडविल्यास शक्याशक्यतेची प्रत्येक वेळची संभावना ही १/२ इतकी असेल आणि मग संभावनेची ही निष्पत्ती कोणत्याही एका परिणामाकरिता (१ / २ × १००) अशी होईल.

कोणत्याही श्रेणीतील कृत्यांच्या 'घडून किंवा न घडून' येण्याची संभा–



आकृती २६

१० नाण्यांचा ओली--सुकीतील (चीत--पट)
" ओली- " चे सैद्धान्तिक बंटन.

विता त्यांच्या बेरजेने मिळते. त्याचप्रमाणे त्या सर्व परिणामांची एकूण संभाविता हवी असल्यास ती त्यांच्या गुणाकारावरून येते. पत्त्यांच्या जुडींतून एक पत्ता काढल्यास अथवा नाणे उडविल्यास एक एक्का किंवा 'चीत' येण्याची संभाविता (१/४ + १/२) इतकी असेल.

—आणि ह्या दोन्ही कृत्यांची संभाविता (१/४ × $\frac{१}{२}$) इतकी होईल.

कोणतेही कृत्य अनुकूल अथवा प्रतिकूल रीत्या होण्याची जी निश्चिती आहे त्यास 'एक' अर्हा देतात. उदाहरणार्थ, एक नाणे हवेत उडविल्यानंतर त्याच्या 'चीत-पट' ची एकूण निश्चिती ($\frac{१}{२}$ ज + $\frac{१}{२}$ न) = १ ही होय.

जर दोन नाणी हवेत उडविली तर त्यांच्या 'चीत-पटा'ची निश्चिती खालील प्रकारे होऊ शकेल—

$(\frac{१}{२} \text{ज} + \frac{१}{२} \text{न})^{२}$

किंवा : १ / ४ ज + १/२ ज. न + १/४ न.

ज्यात : 'चीत'ची संभावना १ । ४

'पट'ची संभावना १ / ४

'चीत–पटा'ची संयुक्त संभावना १ । २

अशा तऱ्हेने 'ड' परिणामात शक्याशक्यतेची सर्वसाधारण संभाविता $(\text{त} + \text{थ})^{\text{ड}}$ अशी असते.

दहा नाणी हवेत उडविल्यानंतर वरील रीतीने येणाऱ्या सैद्धान्तिक 'चीत'चे बंटन आकृती २६ मध्ये दिले आहे. 'ड' वाढविल्यास प्रांकित बिन्दूची संख्या वाढते, व मग ते वक्र अधिक सरलित होत जाते; आणि सरतेशेवटी आकृती २७ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे प्रसामान्य वक्रात रूपांतरित होते.

अवसरातील विचरण दर्शविणारा न्यास चित्रांकित केल्यास बव्हंशी वरील प्रकारची आकृती तयार होते.

अशा बंटनाचे मध्यक ($\bar{\text{य}}$) हे खालील समीकारद्वारा निश्चित होते.

$$\bar{\text{य}} = \text{डा} \times \text{त} \qquad (६९)$$

ज्यात, डा = एकूण प्रयत्न,

व त = शक्यतेची संभाविता.

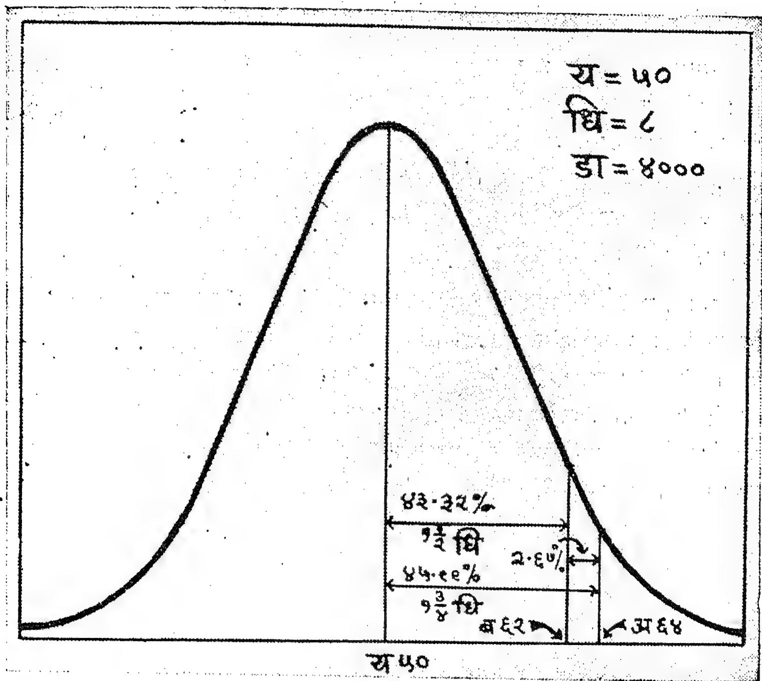
ह्या बंटनाचे प्रमाप–विचलन येणेप्रमाणे :

$$\text{धि} = \sqrt{\text{डा. त. थ.}} \qquad (७०)$$

ज्यात : थ = अशक्यतेची (प्रतिकूलांची) संभाविता.

वरील प्रसामान्य वक्रांतील प्रमाप–विचलनांचा वक्राशी असलेला संबंध पूर्वी दर्शविल्याप्रमाणेच आहे.

प्रमाप–विचलनांची संख्या (मध्यकेपासून दोहों बाजूंस ±)	त्यांत येणारी प्रतिशत पदे ... ...
०·६७४५ धि	५० %
१·०००० धि	६८·२६ %
२·०००० धि	९५·४६ %
३·०००० धि	९९·७३ %



आकृती—२७

वक्राचे सामान्यकरण

मर्यादित न्यास असल्यास त्यापासून तयार होणाऱ्या बंटनाचे स्वरूप साधारणतः अनियामित असे असते. त्यांतील पदांची संख्या वाढविल्यास ही अनियमितता कमी होऊन शेवटी वक्र सरलित होते.

प्रात—समग्रात निव्वळ न्यादर्शांचाच समावेश असतो. त्यामुळे अशा न्यादर्शाधारे प्रात वक्र सरलित करून घेणे केव्हाही इष्ट होय. त्यामुळे बंटन आदर्श बनते. न्यादर्शांऐवजी अनन्त पदे उपयोगात आणून तयार केलेले बंटन हेच खरे आदर्श बंटन होय !

दिलेल्या न्यासाचे वर्णन प्रसामान्य—वक्रद्वारे शक्य आहे अशी जेथे कल्पना करता येते त्या सर्व बाबतीत सदर न्यासाचे सरलन प्रसामान्य वक्राच्या क्षेत्रफळ व कोटी—अक्ष सारणीद्वारा करता येते.

क्षेत्रफळ–सारणीद्वारा प्रसामान्य वक्र अन्वायोजन

प्रसामान्य बंटनात मध्यकेपासून घेतलेल्या ठराविक प्रमाप–विचलनात किती
तिशत पदे येतात हे प्रसामान्य–वक्र क्षेत्रफळसारणीवरून निश्चित करणे शक्य
हे. मध्यकेपासून दोहों बाजूंस एक अथवा अधिक प्रमाप–विचलन अंतरात एकूण
ती प्रतिशत–पदे येतात हे वर दिलेच आहे. अर्थात मग मध्यकेपासूनच्या फक्त
काच बाजूच्या ठराविक प्रमाप–विचलन अंतरात वरील प्रतिशत–पदांच्या
म्मीच पदे येतील हे स्पष्ट होय.

प्रसामान्य वक्राचे मध्यक हे त्या वक्राच्या केंद्रस्थानी असते. ह्या मध्यकेपासून
–अक्षावरील कोणतेही अंतर प्रमाप–विचलन परिभाषेत ठरविल्यास त्या अन्तरात
कूण किती क्षेत्रफळ पडते हे सारणी ३२ वरून निश्चित करता येते. आकृती
७ मध्ये ५० ह्या मध्यकेपासून ६२ ह्या ‘ ब ’ बिन्दूपर्यंतचे अन्तर १२–एकक
ाहे. बंटनाचे प्रमाप–विचलन ८ एकक आहे. त्यामुळे वरील अन्तर हे प्रमाप
चलन परिभाषेत १·५ धि होईल.

सारणी–३२

प्रसामान्य–वक्र–क्षेत्रफळ सारणी

प	.००	.०१	.०२	.०३	.०४	.०५	.०६	.०७
०	.००००	.००४०	.००८०	.०१२०	.०१५९	.०१९९	.०२३९	.०२७
१	.०३९८	.०४३८	.०४७८	.०५१७	.५५७	.०५९६	.०६३६	.०६७
२	.०७९३	.०८३२	.०८७१	.०९१०	.१३३१	.०९८७	.१०२६	.१०६
३	.११७९	.१२१७	.१२५५	.१२९३	.०९४८	.१३६८	.१४०६	.१४४
४	.१५५४	.१५९१	.१६२८	.१६६४	.१७००	.१७३६	.१७७२	.१८०
५	.१९१५	.१९५०	.१९८५	.२०१९	.२०५४	.२०८८	.२१२३	.२१५
६	.२२५७	.२२९१	.२३२४	.२३५७	.२३८९	.२४२२	.२४५४	.२४८
७	.२५८०	.२६१२	.२६४२	.२६७३	.२७०४	.२७३४	.२७६४	.२७९
८	.२८८१	.२९१०	.२९३९	.२९६७	.२९९५	.३०२३	.३०५१	.३०७
९	.३१५९	.३१८६	.३२१२	.३२३८	.३२६४	.३२८९	.३३१५	.३३४
०	.३४१३	.३४३८	.३४६१	.३४८५	.३५०८	.३५३१	.३५५४	.३५७
१	.३६४३	.३६६५	.३६८६	.३७१८	.३७२९	.३७४९	.३७७०	.३७९
.२	.३८४९	.३८६९	.३८८८	.३९०७	.३९२५	.३९४४	.३९६२	.३९८
.३	.४८३२	.४०४९	.४०६६	.४०८३	.४०९९	.४११५	.४१३१	.४१४
.४	.४१९२	.४२०७	.४२२२	.४२३६	.४२५१	.४२६५	.४२७९	.४२९

३२	·४३४५	·४३५७	·४३७०	·४३८२	·४३९४	·४४०६	·४४१८	·४४
५२	·४४६३	·४४७४	·४४८५	·४४९५	·४५०५	·४५१५	·४५२५	·४५
५४	·४५६४	·४५७३	·४५८२	·४५९१	·४५९९	·४६०८	·४६१६	·४६
४१	·४६४९	·४६५६	·४६६४	·४६७१	·४६७८	·४६८६	·४६९३	·४६
१३	·४७१९	·४७२६	·४७३२	·४७३८	·४७४४	·४७५०	·४७५८	·४७
७३	·४७७८	·४७८३	·४७८८	·४७९३	·४७९८	·४८०३	·४८०८	·४८
२१	·४८२६	·४८३०	·४८३४	·४८३८	·४८४२	·४८४६	·४८५०	·४८
६१	·४८६५	·४८६८	·४८७१	·४८७५	·४८७८	·४८८१	·४८८४	·४८
९३	·४८९६	·४८९८	·४९०१	·४९०४	·४९०६	·४९०९	·४९११	·४९
१८	·४९२०	·४९२२	·४९२५	·४९२७	·४९२९	·४९३१	·४९३२	·४९
३८	·४९४०	·४९४१	·४९४३	·४९४५	·४९४६	·४९४८	·४९४९	·४९
५३	·४९५५	·४९५६	·४९५७	·४९५९	·४९६०	·४९६१	·४९६२	·४९
६५	·४९६६	·४९६७	·४९६८	·४९६९	·४९७०	·४९७१	·४९७२	·४९
७४	·४९७५	·४९७६	·४९७७	·४९७७	·४९७८	·४९७९	·४९८०	·४९
८१	·४९८२	·४९८३	·४९८४	·४९८४	·४९८४	·४९८५	·४९८५	·४९
८६५	·४९८७	·४९८७	·४९८८	·४९८८	·४९८८	·४९८९	·४९८९	·४९
९०३	·४९९१	·४९९१	·४९९१	·४९९२	·४९९२	·४९९२	·४९९२	·४९

त्याच आकृतीवरून हेही दिसून येईल, की वरील अन्तरात एकूण ४३·३२ प्रतिशत–पदे पडतात. आकृती २७ मध्ये आणखी एक दुसरा बिन्दू ६४ एकक घेतला तर हा बिन्दू मध्यकेपासून १·७५ धि इतका दूर आहे. म्हणजे त्यात एकूण ४५·९९ प्रतिशत–पदे येतील. मध्यक आणि ६४–बिन्दू व मध्यक आणि ६२–बिन्दू ह्यात अनुक्रमे ४५·९९ व ४३·३२ इतकी प्रतिशत पदे येतात. त्या-अर्थी ६४ व ६२ बिन्दूतील अन्तरात (४५·९९ – ४३·३२ =) २·६७ प्रति-शत पदे असावीत हे सिद्ध होते. वरील बंटनात एकूण ४००० पदे आहेत. तेव्हा वरील ६४ व ६२ बिन्दूतील अन्तरात $\left(\frac{४००० \times २\cdot६७}{१००}\right)$=१०६·८ इतकी पदे असली पाहिजेत.

बंटनाच्या कोणत्याही एका संभागात एकूण पदांच्या किती प्रतिशत पदे असतील हे काढता येते. त्या विभागातील सैद्धान्तिक पदांची संख्याही ह्या प्रति-शततेच्या एकूण पदसंख्येशी गुणाकार करून काढता येईल. ही सैद्धान्तिक पदसंख्या चित्रात प्रांकित केल्यास येणारे वक्र हे प्रसामान्य असते.

सारणी—२३

क्षेत्रफळ–सारणीद्वारा प्रसामान्य-वक्र-अन्वायोजन. ' अब ' कंपनीद्वारा उत्पादित ६०० वॉशर्सच्या जा

(१) जाडी (इंचात)	(२) मध्य-बिन्दू	(३) वॉशर्सची वारंवारता च	(४) माध्यापासून संभागाची (विचलने) य	(५) स्तंभ ४ धि–मध्ये य/धि	(६) संभागसी तथा म तील प्रति क्षेत्रफळ —
•०१८० — •०१८३९	•०१८२	६	—•००२२	—२•६१	४९•५५
•०१८४ — •०१८७९	•०१८६	३०	—•००१८	—२•१३	४८•३४
•०१८८ — •०१९१९	•०१९०	४२	—•००१४	—१•६६	४५•१५
•०१९२ — •०१९५९	•०१९४	६६	—•००१०	—१•१८	३८•१०
•०१९६ — •०१९९९	•०१९८	९४	—•०००६	— •७१	२६•१२
•०२०० — •०२०३९	•०२०२	१२०	—•०००२	— •२४	९•४८
			•०००२	•२४	९•४८
•०२०४ — •०२०७९	•०२०६	१०२	•०००६	•७१	२६•१२
•०२०८ — •०२११९	•०२१०	६०	•००१८	३•१८	३८•१०
•०२१२ — •०२१५९	•०२१४	५४	•००१४	१•६६	४५•१५
•०२१६ — •०२१९९	•०२१८	१४	•००१८	२•१३	४८•३४
•०२२० — •०२२३९	•०२२२	१२	•००२२	२•६१	४९•५५
		६००			

प्रसामान्य वक्राचे अन्वायोजन कोटि–अक्षद्वारे सुद्धा होते. सारणी ६ मध्ये मध्यकेपासून विवक्षित अंतरावरील प्रसामान्य वक्राचे हे अक्ष भूयिष्ठ–क्षाच्या प्रतिशततेत दिले आहेत. सदर भूयिष्ठ–कोटि–अक्ष वंटनाच्या केन्द्रिय-भागी सतो.

कोणत्याही प्रसामान्य वक्राचे सूत्र खालीलप्रमाणे :

$$रा = रा_० धा^{\frac{-य^२}{२ धि^२}} \qquad (७१)$$

ज्यात $रा_० = भूयिष्ठ\ अक्ष = डा / धि \sqrt{२ प्या}$

$$= डा / २\cdot५०६६२८\ धि$$

सारणी ३३ किंवा ३४ मधील न्यासाकरिता $रा_०$ ची अर्हा खालील-माणे संगणित करावी.

धि (संभाग एककात) = २·१०९

$$रा_० = \frac{डा}{२\cdot५०६६२८} = \frac{६००}{धि\ २\cdot१०९ \times २\cdot५०६६२८}$$

$$= ११३\cdot५.$$

सारणी–३४

कोटि–अक्षद्वारे प्रसामान्य–वक्राचे अन्वायोजन.

'अब्र' कंपनीद्वारा उत्पादित ६०० वॉशर्सच्या जाडीतील विचरणे

जाडी (इंचात) (१)	केन्द्र–बिन्दू (२)	वॉशर्सची वारंवारता (३) च	मध्यकेपासून केन्द्र-बिन्दूचे विचलन (४) य	स्तंभ ४ प्रमाप–विचलनात (५) य / धि
·०१८०–·०१८३९	·०१८२	६	·००२०	२·३७
·०१८४–·०१८७९	·०१८६	३०	·००१६	१·९०
·०१८८–·०१९१९	·०१९०	४२	·००१२	१·४२
·०१९२–·०१९५९	·०१९४	६६	·०००८	·९५
·०१९६–·०१९९९	·०१९८	९४	·०००४	·४७
·०२००–·०२०३९	·०२०२	१२०	·००००	·००
·०२०४–·०२०७९	·०२०६	१०५	·०००४	·४७
·०२०८–·०२११९	·०२१०	६०	·०००८	·९५
·०२१२–·०२१५९	·०२१४	५४	·००१२	१·४२
·०२१६–·०२१९९	·०२१८	१४	·००१६	१·९०
·०२२०–·०२२३९	·०२२२	१२	·००२०	२·३७
		६००		

उत्तम-अन्वायोजनार्थ समन्विक्षा (क्ष^{२}-समन्विक्षा)

दिलेल्या न्यासातील वास्तविक वारंवारतेचे सैद्धान्तिक वारंवारतेशी असणारे अन्वायोजन उत्तम आहे किंवा नाही हे तपासून पाहण्याकरिता-कार्ल पिअर्सनने एक समन्विक्षा तयार केली आहे. ह्या समन्विक्षेत क्ष^{२}-ची गणना करावी लागते.

$$\text{क्ष}^{२} = \text{धी}\left(\frac{(\text{च}_{०} - \text{च})^{२}}{\text{च}}\right) \qquad (७२)$$

ज्यात $\text{च}_{०}$ = वास्तविक वारंवारता. च = सैद्धान्तिक वारंवारता.

क्ष^{२}-ची संगणना कशी करायची हे खालील सारणीत दाखविले आहे.

सारणी–३५

उत्तम–अन्वायोजनार्थ क्ष^{२}–समन्विक्षा (सारणी ३३ मधील न्यासाकि

जाडी (इंचात) (१)	वॉशर्सची वारंवारता च. (२)	सैद्धान्तिक वारंवारता च. (३)	च०–च (४)	(च०–च (५)
·०१८०–·०१८३९	६	७·३ }	९·६	९२·१
·०१८४–·०१८७९	३०	१९·१ }		
·०१८८–·०१९१९	४२	४२·३	·३	·०
·०१९२–·०१९५९	६६	७१·९	–५·९	३४·८
·७१९६–·०१९९९	९४	९९·८	–५·८	३३·६
·०२००–·०२०३९	१२०	११३·८	६·२	३८·४
·०२०४–·०२०७९	१०२	९९·८	२·४	५·७
·०२०८–·०२११९	६०	७१·९	–११·९	१४१·६
·०२१२–·०२१५९	५४	४२·३	१२·३	१५१·२
·०२१६–·०२१९९	१४	१९·१ }		
·०२२०–·०२२३९	१२	७·३ }	– ·४	·१

वरील क्ष^{२}–सार्थ नाही, कारण ७–स्वतंत्रतेच्या मात्रेकरिता ·०५ पातळीवर त्याची अर्हा १४·०६७
हे उत्तम आहे असे समजावे.

सारणी–३६

प्रसामान्य–वक्राचे–कोटिअक्ष. (भूयिष्ठ–कोटिअक्षाचे दशमलवा

य / धि	·००	·०१	·०२	·०३	·०४	·०५	·०६
०·०	१·०००००	·९९९९५	·९९९८०	·९९९५५	·९९९२०	·९९८७५	·९९८२०
०·१	·९९५०१	·९९३९६	·९९२८३	·९९१५८	·९९०२५	·९८८८१	·९८७२८
०·२	·९८०२०	·९७८१९	·९७६०९	·९७३९०	·९७१६१	·९६९२३	·९६६७६
०·३	·९५६००	·९५३०९	·९५०१०	·९४७०२	·९४३८७	·९४०५५	·९३७२३
०·४	·९२३१२	·९१३९८	·९१५५८	·९११६९	·९०७७४	·९०३७१	·८९९६१
०·५	·८८२५०	·८७८०५	·८७३५३	·८६८९६	·८६४३२	·८५९६१	·८५४८८
०·६	·८३५२०	·८३०२३	·८३५१४	·८२०१०	·८१४८१	·८०९५७	·८०४२९
०·७	·७८२७०	·७७७२१	·७७१६७	·७६६१०	·७६०४८	·७५४८४	·७४९१६
०·८	·७२६१५	·७२०३३	·७१४४८	·७०८६१	·७०२७२	·६९६८१	·६९०८७
०·९	·६६६८९	·६६०९७	·६५४९४	·६४८९१	·६४२८७	·६३६८३	·६३०७७
१·०	·६०६५३	·६००४७	·५९४४०	·५८८३४	·५८२२८	·५७६२३	·५७०१७
१·१	·५४०६७	·५४००७	·५३४००	·५२८१२	·५२२१४	·५१६२०	·५१०२७
१·२	·४८६७५	·४८०१२	·४७५११	·४६९३३	·४६३५७	·४५७९३	·४५२१२
१·३	·४२९५६	·४२३९९	·४१८४५	·४१२९४	·४०७४७	·४०२०२	·३९६६१
१·४	·३७५३१	·३७००७	·३६४८७	·३५९७१	·३५४५९	·३४९५०	·३४४४५

/ घि	·००	०·१	·०२	·०३	·०४	·०५	·०६	·
५	·३२४६५	·३११८०	·३१५००	·३१०२३	·३०५५०	·३००८२	·२९६१८	·२९
६	·२७८०५	·२७३६१	·२६९२३	·२६४८९	·२६०९५	·२५६३४	·२५२१३	·२४
७	·२३५७५	·२३१७६	·२२७८२	·२२३९२	·२२००८	·२१६२७	·२१२५१	·२०
८	·१९७९०	·१९४३६	·१९०८६	·१८७४१	·१८४००	·१८०६४	·१७७३२	·१७
९	·१६४४८	·१६१३७	·१५८३१	·१५५३०	·१५२३२	·१४९३९	·१४६५०	·१४
०	·१३५३४	·१३२६५	·१३०००	·१२७४०	·१२४८३	·१२२३०	·११९८१	·११
१	·११०२५	·१०७९५	·१०५७०	·१०३४७	·१०१२९	·०९९१४	·०९९१४	·०९
२	·०८८९२	·०८६९८	·०८५०७	·०८३२०	·०८१३६	·०७९५६	·०७७७८	·०७
३	·०७१००	·०६९३९	·०६७८०	·०६६२४	·०६४७१	·०६३२१	·०६१७४	·०६
४	·०५६१४	·०५४८१	·०५३५०	·०५२२२	·०५०९६	·०४९७३	·०४८५२	·०४
५	·०४३९४	·०४२८५	·०४१७९	·०४०७४	·०३९७२	·०३८७३	·०३७७५	·०३
६	·०३४०५	·०३३१७	·०३२३३	·०३१४८	·०३०६६	·०२९८६	·०२९०८	·०२
७	·०२६१२	·०२५४२	·०२४७४	·०२४०८	·०२३४३	·०२२८०	·०२२१८	·०२
८	·०१९८४	·०१९२९	·०१८७६	·०१८२३	·०१७७२	·०१७२३	·०१६७४	·०१
९	·०१४९२	·०१४४९	·०१४०८	·०१३६७	·०१३२८	·०१२८८	·०१२५२	·०१
०	·०११११	·००८१९	·००५९८	·००४३२	·००३०९	·००२१९	·००१५३	·००
०	·०००३४	·०००२२	·०००१५	·०००१०	·००००६	·००००४	·००००३	·००

प्रकरण १३

देशनांक

न्यासाचे वर्गातील होणारे बदल मोजण्याकरिता ज्या विशिष्ट सांख्यिकीय विधीचा उपयोग होतो, त्या विधीस देशनांक-विधी असे म्हणतात. ह्या विधीच्या उपयोगाधारे प्राप्त होणाऱ्या समंकास **देशनांक** असे म्हणतात.

सर्वसाधारणपणे ही रीती व्यवसाय, रोजगार किंमती, वर्गांचे आरोग्य, विद्यालयीन दर्जा, आदिसारख्या सर्वसाधारण परिस्थितींना लावता येते. ह्या परि-स्थितीच्या वर्णनपर न्यास हा सारखा बदलत असतो; तथापि त्यातून ठराविक अशी एक प्रवृत्ती वाहात असते; तिचे मापन देशनांक विधिद्वारा होऊ शकते.

वरील प्रकारच्या न्यासातील अनन्त चलित अशा पदांतील फरक मोजण्या-करिता तौलनिक अशा सुयोग्य सापेक्ष-अंकाची आवश्यकता असते. देशनांक हा अशा प्रकारचा तौलनिक मापांकाचा सापेक्ष समंक होय.

कालाच्या अन्तरालामुळे उद्भवणारी मापांकातील विचलने देशनांकाने मोजता येतात. भौगोलिक परिस्थितीमुळे होणारे फरकही देशनांकाने मोजता येतात. निरनिराळ्या प्रदेशांतील एकाच वस्तूच्या तौलनिक विक्रीतील संभवनीयता ही देशनांकाने दर्शविता येईल; त्याचप्रमाणे एकाच कॉलेजातील दोन निर-निराळ्या वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या विद्यालयीन योग्यतेची तुलनाही देशनांकाधारे करणे शक्य आहे. एकाच उद्योगधंद्यातील दोन कॉर्पोरेशन्सच्या क्रेडिटचीही तुलना देश-नांकाने होऊ शकते. परन्तु अर्थाच्या सरलित व सुटसुटीतपणाकरिता देशनांकाची ही चर्चा बाजारभावापर्यंतच सीमित ठेवली आहे.

देशनांक–रचनेतील समस्या

(१) देशनांक–गणनेस्तव लागणारा न्यास व विधी ही ज्या कामाकरिता त्या देशनांकाचा उपयोग व्हायचा, त्याबरहुकूम असावीत.

(२) देशनांक–गणनेसाठी उपयोगात येणाऱ्या न्यासातील पदांची एकूण संख्या व प्रकार हे उपयोगात आणलेल्या श्रेणीतील विचलनांचे योग्य प्रतिनिधित्व करणारे असावेत.

(३) देशनांक–गणनेसाठी लागणारा आवश्यक न्यास गोळा करण्याची योग्य रीती प्रथम ठरवावी. त्यानंतर असा आवश्यक न्यास कोठून व कसा जमवा-यचा हे निश्चित करावे. त्यानंतरच तो न्यास खरोखरीचा असा गोळा करण्याची जबाबदारी अंगीकारावी.

(४) देशनांकाकरिता आधार–कालखंड व त्या देशनांक–गणनेस उपयुक्त अशी रीती कोणती हे त्यानंतर ठरवावे.

(५) देशनांक–गणनेतील प्रत्येक पदाचे महत्त्व त्यानंतर निश्चित करून मगच अखेरची गणना करावी. पदांच्या ह्या तौलनिक महत्त्वास ' भारण ' असे म्हणतात.

वस्तूंची संख्या व प्रकार

बाजारभावाकरिता देशनांकाची गणना ही त्याच्या न्यादर्श अथवा ठराविक विभागावरून करतात. त्यामुळे बाजारभावातील ह्या वस्तूंच्या निवडीत खालील गोष्टी लक्ष्यात घ्यावयास हव्यात.

(१) वापरात येणारा न्यादर्श हा प्रातिनिधिक असावा. न्यादर्शातील पदे ही त्याच्या गुणाकरिता प्रातिनिधिक असावी. त्या वस्तूंचे बाजारभाव सहजासहजी प्राप्त होऊ शकतात म्हणून त्या पदांची निवड करू नये.

(२) न्यादर्शातील ही पदे भरपूर प्रमाणात असावी. डॉ. इर्व्हिंग फिशरच्या मते बाजारभाव–देशनांकात निदान वीस तरी पदे असावीच; पन्नास असल्यास फारच उत्तम! पन्नासपेक्षा अधिक पदसंख्या असल्यास विशेष काही लभ्यांश होतो असे नाही. दोनशे पदांचा समावेश केल्याने देशनांक गणनेत होऊ घातलेल्या कष्टाच्या व खर्चाच्या तुलनेत मिळणारी माहिती ही मुळीच गैरवाजवी नाही.

आधार–कालखंड

देशनांक–गणनेतील आधार–कालखंडास १०० प्रतिशत–अर्हा देण्यात येते. ह्या कालखंडाचा संदर्भ म्हणून उपयोग असतो. ह्या आधार–कालखंडाशी सापेक्ष अशी देशनांक–गणना त्यानंतर करावी.

आधार–कालखंडाच्या ह्या निवडीत खालील गोष्टी लक्ष्यात घ्याव्या.

(१) आधार–कालखंड निवडताना तो अतिभूतकालात असू नये, कारण हल्लीचे बाजारभाव व आधार–कालखंडातील बाजारभावांची तुलना मग यथार्थतेने ' वर्तमानकालीन ' म्हणून म्हणता येणार नाही.

(२) अशी तुलना साधारणतः प्रसामान्य–कालखंडाशी असते; म्हणूनहि हा आधार–कालखंड अगदीच भूतकालातलाहि असणे बरोबर नाही.

आधार–कालखंडातील फेरफार

देशनांकाचा आधार–कालखंड हा तुलनेकरिता एका कालखंडातून दुसऱ्या कालखंडात बदलून घ्यावा लागतो. ह्याकरिता श्रेणीतील प्रत्येक अंकास नवीन आधार–वर्षाच्या देशनांकाने भागावे. आलेल्या परिणामास मग १०० ने गुणावे.

खालील उदाहरणात १९२६ ह्या आधार–वर्षाचा देशनांक १९२८ मध्ये बदलण्यात आला आहे. त्याकरिता १९२६ च्या देशनांकास १९२८ च्या देशनांकाने (१५०·०) प्रथम भागले; व मग आलेल्या पदसंहतीस १०० ने गुणले.

∴ १९२६	१९२७	१९२८	१९२९
१००·०	११०·१	१५०·०	१२५·३
६६·७	७३·४	१००·०	८३·५

संगणनेसाठी विधींची निवड

देशनांक–गणनेस उपयुक्त अशी जवळजवळ १५० सूत्रे इर्व्हिंग–फिशरने दिली आहेत. देशनांक–गणनेची मुख्य सूत्रे जी आहेत, त्यांचीच विविध रूपे म्हणून थोड्याफार फरकाने ही १५० सूत्रे होतात. त्यांपैकी मुख्य व मोठा विभाग म्हणून खालील रीतींचा निर्देश देशनांक–संगणनेत आवश्यक आहे : (१) अभारित अशी सरल रीती (अ) वास्तविक बाजारभावांचे समूहन, (ब) सापेक्ष बाजारभावांचे माध्य, (२) भारित रीती, (अ) वास्तविकांचे भारित समूहन, (ब) सापेक्षांचे भारित माध्य.

वास्तविक बाजारभावांचे असंयुक्त समूहन

ह्या रीतीप्रमाणे एका वर्षाच्या दिलेल्या वस्तूंच्या बाजारभावाची आधार–वर्षातील वस्तूंच्या बाजार–भावाशी तुलना करतात.

$$\text{यो}_{\text{त}_\text{ड}}/\text{यो}_{\text{त}_0} \qquad (७४)$$

ज्यात, $\text{यो}_{\text{त}_\text{ड}}$=कोणत्याही एका कालखंडातील दिलेल्या वस्तूंच्या बाजारभावाची राशी.

$\text{यो}_{\text{त}_0}$=आधार–कालखंडातील त्याच वस्तूंच्या बाजारभावाची राशी

सारणी–३७

देशनांक संगणना : धातूंचे ठोक बाजारभाव.

(वास्तविकांचे अभारित–असंयुक्त समूहन)

धातू	एकक	बाजारभाव (डॉलरमध्ये)		
		१९२६	१९२८	१९३०
अशोधित लोखंड	टन	२०·४२००	१७·६८००	१७·१७००
तांबे	पौंड	·१३९३	·१४६८	·१३११
अल्युमिनियम	पौंड	·२६९९	·२३९०	·२३३९
शिसे	पौंड	·०८२५	·०६१४	·०५३८
जस्त	पौंड	·०७३७	·०६०३	·०४५६
पत्रे	पौंड	·६५३६	·५०३९	·३१६३
चांदी	औंस	·६२११	·५८१८	·३८१५
	एकूण	२२·२६०१	१९·२७३२	१८·३३२२
	देशनांक	१००·०%	८६·६%	८२·४%

देशनांक–गणन अभारित–असंयुक्त समूहन रीतीत एक फार मोठा दोष आहे. ज्या वस्तूंचे बाजारभाव इतरांच्या तुलनेत अधिक आहेत त्या वस्तूंचा त्या देशनांकात अधिक प्रभाव पडतो. वरील देशनांक–गणनेत लोखंडाच्या बाजारभावाचे आधिक्य आहे. त्यामुळे लोखंडाचे भाव १० टक्क्यांनी जरी कमी आले आणि इतर सर्व धातूंचे बाजारभाव १० टक्क्यांनी वाढले तरी एकूण देशनांकात अपवर्धनच झाल्याचे आढळून येईल. जसे :—

	वस्तूंची संख्या	१९२६	१९३०	
अशोधित लोखंड	१	२०.४२	१८.३७८	१०% अपवर्धन
इतर सर्व वस्तू	६	१.८४०१	२.०२४१	१०% वाढ
एकूण	७	२२.२६०१	२०.४०२१	
देशनांक		१००%	९१.७%	

सर्व वस्तूंचे बाजारभाव एका पातळीवर आणूनही ही अडचण दूर होणार नाही. सर्व बाजारभाव एका पातळीत आणण्यामुळे नवीनच विषमता निर्माण होते.

सापेक्ष बाजारभावाचे माध्य

वरील विषमता नाहीशी करावयाची असल्यास वास्तविकाऐवजी वस्तूंचे सापेक्ष बाजारभाव विचारात घ्यावे. कोणत्याही वस्तूंचे बाजारभाव आधार–कालखंडातील बाजारभावाच्या प्रतिशततेत घेतल्यास सापेक्ष बाजारभाव येतात. सूत्ररूपात हे असे मांडता येईल.

$$\frac{त_{ड}}{त_{०}}$$

ज्यात $त_{ड}$=दिलेल्या कालखंडातील बाजारभाव.

$त_{०}$ = आधार–कालखंडातील बाजारभाव.

ह्या रीतीत प्रत्येक वस्तूची आधारकालखंडातील सापेक्ष किंमत १०० टक्के मानण्यात येते. हव्या असलेल्या कालखंडाकरिता ह्या सापेक्षांचा माध्य घ्यावा. हा माध्य समान्तर-मध्यक, मध्यका अथवा गुणोत्तर-मध्यकांपैकी कोणताहि असू शकतो.

आलेला माध्य म्हणजेच त्या वस्तूंकरिता त्या वर्षीचा देशनांक होय.

समान्तर-मध्यकेचा माध्य म्हणून उपयोग करून सापेक्ष-बाजारभावाचे देशनांक संगणनेत खालील सूत्राचा उपयोग करावा.

$$\frac{यो\ (त_{ड}\ /\ त_{०})}{डा}$$

सारणी–३८

देशनांक संगणना : धातूंचे ठोक बाजारभाव. (सापेक्ष माध्य म्हणून अभारित

धातू	एकक	१९२६		१९२८	
		किंमत	सापेक्ष	किंमत	सापेक्ष
अशुद्ध लोखंड	टन	२०.४२००	१००%	१७.६८००	८६.६%
तांबे	पौंड	.१३९०	१००	.१४६८	१०५.४
अल्युमिनियम	पौंड	.२६९९	१००	.२३९०	८८.६
शिसे	पौंड	.०८२५	१००	.०६१४	७४.४
जस्त	पौंड	.०७३७	१००	.०६०३	८१.८
टिन	पौंड	.६५३६	१००	.५०३९	७७.१
चांदी	औंस	.६२११	१००	.५८१८	९३.७
एकूण			७००		६०७.६
देशनांक			१००		८६.८

देशनांक गणनेत निरनिराळ्या माध्यांचे फायदे-तोटे

समान्तर-मध्यक : फायदे.

(१) ह्या माध्याची संगणना इतर माध्यांपेक्षा सापेक्षतः सोपी आहे.

(२) हा माध्य नेहमीच्या परिपाठातला असल्याने सहज समजण्यासारखा आहे.

(३) भारित माध्य हवा असल्यास निरनिराळ्या विभागांचे माध्यांचे समान्तर-मध्यक घेतल्यानेही सर्व अर्हांचा माध्य प्राप्त होतो. (श्रेणीत निरनिराळ्या संख्या असलेली पदे असल्यास भारित-माध्याची आवश्यकता असते.)

तोटे :

(१) चरम-सीमेतील पदांमुळे समान्तर-मध्यकेवर परिणाम होतो.

(२) ह्या रीतीत अपवर्धनापेक्षा वर्धनांना अधिक महत्त्व प्राप्त होते.

उदाहरणार्थ :— एका वस्तूचे भाव १ रुपयावरून दोन रुपयांवर आले तर त्यात वाढ १०० टक्के होते. दुसऱ्या एका वस्तूचे भाव रु. २ वरून रुपयावर आल्यास त्यात ५० टक्के अपवर्धन होते. ह्या दोन्ही वस्तूंच्या संयुक्त बाजारभावाचा समान्तर-मध्यक-सापेक्षात देशनांक घेतला तर त्यात वर्धनच दिसून येईल.

वस्तू	१९२६		१९२८	
	किंमत	सापेक्ष	किंमत	सापेक्ष
अ	रु. १	१००	रु. २	२००
ब	रु. २	१००	रु. १	५०
एकूण		२००		२५०
देशनांक		१००		१२५

(३) ह्या रीतीत देशनांकाचा आधार हा सहजासहजी लघुरीतीने बदलता येत नाही.

मध्यका : फायदे

(१) समान्तर-मध्यकेप्रमाणे मध्यकात वर्धनांना अधिक महत्त्व प्राप्त होत नाही.

(२) चरम-सीमेतील पदामुळे समान्तर-मध्यकेप्रमाणे मध्यकावर परिणाम होत नाही.

(३) मध्यकाची संगणनाही सोपी असते; कारण सर्व सापेक्ष पदे आकार-मानानुसार मांडून मग त्यातील केन्द्र पदाचीच फक्त निवड करावयाची असते.

तोटे :

(१) बीजीय रीतीने मध्यका हाताळली जात नाही. श्रेणीतील दरेक विभागाची मध्यका काढून त्यांचा माध्य श्रेणीची मध्यका म्हणून स्वीकार करता येणार नाही.

(२) श्रेणीतील पदे कमी असल्यास मध्यका–अर्हा ही अनिश्चित व अनियमित अशी असते.

(३) मध्यका उपयोगात घेऊन तयार केलेल्या देशनांकांचा आधार लघु-रीतीने नवीन आधारावर बदलून घेता येणार नाही.

गुणोत्तर–मध्यक : फायदे

(१) गुणोत्तर–मध्यकात निरनिराळ्या वस्तूंच्या बाजारभावातील वर्धन अधिक महत्त्व धारण करीत नाही. उलट गुणोत्तर–मध्यकात बाजारभावातील निष्पत्तीस सारखेच महत्त्व असते.

समान्तर–मध्यकेत तोटा म्हणून निर्देशिलेली बाब गुणोत्तर–मध्यकाच्या उपयोगाने शुद्ध होते.

	१९२६		१९२८	
वस्तू	किंमत	सापेक्ष	किंमत	सापेक्ष
अ.	रु. १	१००	रु. २	२००
ब.	रु. २	१००	रु. १	५०
गुणोत्तर–मध्यक :		१००		१००

(२) ह्या रीतीने तयार केलेला देशनांकाचा आधार हा लघुरीतीने नवीन आधारात सहज बदलून घेता येतो.

तोटे :

(१) गुणोत्तर–मध्यकाची गणना ही इतर माध्यांच्या गणनेच्या मानाने अधिक कष्टकर व क्लिष्ट असते.

(२) गुणोत्तर–मध्यक हे माध्य विशेष प्रचारात नाही.

देशनांकाचे भारण :

देशनांकातील निरनिराळ्या पदांना त्यांच्या स्थितीप्रमाणे महत्त्व देणे हे बव्हंशी श्रेयस्कर असते. असे न केल्यास मग त्या वस्तूंना त्यांच्या बाजारभावांच्या

प्रमाणात अथवा इतर कोणत्यातरी अवसरकारकानुसार महत्त्व येते अथवा भार प्राप्त होतो.

अभारित वास्तविकांचे समूहन पद्धतीतील आक्षेप देशनांकातील पदांचे सहेतुक भारणाने दूर करणे शक्य आहे. त्याकरिता देशनांकातील पदांना त्या पदांच्या एकूण उत्पादित राशीने गुणावे.

भारित–माध्य :

अशा तऱ्हेचा समान्तर–मध्यक–भारित माध्य खाली दिल्याप्रमाणे काढावा.

(१) प्रत्येक पदास त्याच्या भाराने गुणावे.

(२) येणाऱ्या परिणामाचा योग घ्यावा.

(३) त्या योगास भाराच्या एकूण राशीने भागावे.

(४) येईल तो भारित–माध्य समजावा.

$$\text{भारित–माध्य} = \frac{\text{यो (पद} \times \text{भार)}}{\text{यो (भार)}} \qquad (७६)$$

उदाहरणार्थ :

ब्रिटानिया ब्रेडचे दोन भाव आहेत. बेकरीतील पावाची किंमत ६० नये पैसे आहे. बेकरीतून १०,००० पावांची विक्री होते. किरकोळ विक्रेते त्याचाच भाव ८० नये पैसे लावतात. त्यांची विक्री फक्त १००० पावच असली, तर त्यांचा भारित–माध्य खालीलप्रमाणे येईल.

	किंमत	राशी	किं. × रा
बेकरी	रु. ०·६,	१०,००० =	६००० रु.
किरकोळ विक्रेता	रु. ०·८,	१,००० =	८०० रु.
		११,००० =	६,८०० रु.

∴ ६,८०० ÷ ११,००० = रु. ०·६२

वास्तविक बाजारभावांचे भारित समूहन :

प्रत्येक वस्तूचा उत्पादनांक भार म्हणून वापरून वास्तविक बाजारभावाचे भारित समूहन काढता येते. त्याकरिता कोणत्याही एका विशिष्ट कालखंडातील अथवा वर्षातील त्या वस्तूचे उत्पादनाची राशी भार म्हणून उपयोगात आणतात. हा विशिष्ट कालखंड बहुधा आधार–कालखंडच असतो. हव्या असलेल्या वर्षाच्या भारित–समूहनाचा, आधार–वर्षाशी काय संबंध आहे, हे ठरवले म्हणजे येणारा परिणाम हा भारित–देशनांक होय.

$$\frac{\text{यो} (\text{त}_{\text{ह}} \cdot \text{थ}_{०})}{\text{यो} (\text{त}_{०} \cdot \text{थ}_{०})} \qquad (७७)$$

ज्यात—

$\text{त}_{\text{ह}}$ = हव्या-असलेल्या वर्षी त्या वस्तूची किंमत.

त_{0} = आधार–वर्षातील त्या वस्तूची किंमत.

थ_{0} = आधार–वर्षातील त्या वस्तूची उत्पादन–राशी.

$\text{थ}_{\text{ह}}$ = हव्या असलेल्या वर्षातील त्या वस्तूची उत्पादन–राशी.

$$\text{१९२८ करिता}: \frac{\text{यो}\ (\text{त}_1\ \text{थ}_0)}{\text{यो}\ (\text{त}_0\ \text{थ}_0)} = \frac{\text{डॉ. १,२७२,०१२.५१}}{\text{डॉ. १,४४६,०७६.७३}} = \text{८८.०}\%$$

$$\text{१९३० करिता}: \frac{\text{यो}\ (\text{त}_2\ \text{थ}_0)}{\text{यो}\ (\text{त}_0\ \text{थ}_0)} = \frac{\text{डॉ. १,१४९,८७५.८०}}{\text{डॉ. १,४४६,०७६.७३}} = \text{७९.५}\%$$

परिस्थिती सारखी बदलत असते. ह्याकरिता त्या वस्तूची एका निश्चित कालखंडातील उत्पादन–राशी इतर अनेक कालखंडाकरिता योग्य भार होऊ शकत नाही. म्हणून दरवर्षी बदलणारे भार उपयोगात आणणे आवश्यक आहे. असे भार म्हणजे ज्या त्या वर्षात उत्पन्न होणारी त्या वस्तूची उत्पादन–राशी होय. त्यामुळे देशनांक–गणनेकरिता वरील सूत्रांत खालीलप्रमाणे फरक करावयास हवा.

$$\text{यो}\ (\text{त}_{\text{ह}} \cdot \text{थ}_{\text{ह}}\ /\ \text{यो}\ (\text{त}_0\ \text{थ}_{\text{ह}}) \qquad (\text{७८})$$

$$\text{१९२८ करिता}: \frac{\text{यो}\ (\text{त}_1\ \text{थ}_1)}{\text{यो}\ (\text{त}_0\ \text{थ}_1)} = \frac{\text{डॉ. १,२६८, ४१४.०३}}{\text{डॉ. १,४३८, ३३९.२०}} = \text{८८.१९}\%$$

$$\text{१९३० करिता}: \frac{\text{यो}\ (\text{त}_2\ \text{थ}_2)}{\text{यो}\ (\text{त}_0\ \text{थ}_2)} = \frac{\text{डॉ. ९६२, ३०३.२०}}{\text{डॉ. १,२२०, ६३५.०५}} = \text{७८.८४}\%$$

सापेक्षांचे भारित–माध्य

हव्या असलेल्या कालखंडाकरिता सापेक्ष बाजारभावांचे भारित–माध्य घेऊनही देशनांक तयार करता येईल. उत्पादन–राशी मात्र मग भार म्हणून वापरता येणार नाही; कारण, प्रत्येक राशी ही पौंड, औंस, टन वगैरेसारख्या निरनिराळ्या मापांत असते. सापेक्ष बाजारभाव आणि ह्या भारांचा गुणाकार करूनही त्या सर्वांची बेरीज नियमाप्रमाणे करता येणार नाही. समान एककात असणाऱ्या राशींचे भार म्हणून मग अशा वेळेस वापरावयास हव्यात. सर्वसाधारण असा नेहमीच्या उपयोगातील राशिभार म्हणजे रुपयाच होय! अर्थात मग उत्पादन राशी भार म्हणून वापरण्याऐवजी पैशातील किंमतच राशिभार म्हणून वापरणे योग्य ठरते.

भारित समान्तर–मध्यक पद्धतीत आधार–कालखंड भार धरल्यास देशनांकाचे सूत्र असे :—

$$\frac{यो \left(\frac{त_{इ}}{त_{०}} \times (त_{०}\ थ_{०}) \right)}{यो\ (त_{०}\ थ_{०})} \qquad (७९)$$

म्हणजे, $यो\ (त_{इ}\ थ_{०}) / यो\ (त_{०} थ_{०})$ कारण;

$त_{०}\ थ_{०}$ = आधार–कालखंडातील उत्पादनाची अर्हा.

दिलेल्या वर्षातील राशिभार म्हणून वापरल्यास एक नवीन सूत्र तयार होते.

$$\frac{यो \left(\frac{त_{इ}}{त_{०}} \times (त_{इ}\ थ_{इ}) \right)}{यो\ (त_{इ}\ थ_{इ})} \qquad (८०)$$

$$१९२८ \text{ करिता : } \quad \frac{\text{डॉ. } १,१४५,०६३}{\text{डॉ. } १,२८४,१२२{\cdot}६३} = ८९{\cdot}१७\ \%$$

$$१९३० \text{ करिता : } \quad \frac{\text{डॉ. } ७८२,४८३{\cdot}६२}{\text{डॉ. } ९६३,६७७{\cdot}२०} = ८१{\cdot}२०\ \%$$

आदर्श देशनांक :

देशनांक परीक्षेप्रीत्यर्थ काही समन्विक्षा आहेत. ह्या समन्विक्षेस उतरणारा असा देशनांक **इर्व्हिंग फिशरने** शोधून काढला आहे. परस्पर विरुद्ध विभ्रम असलेल्या दोन सूत्रांचे गुणोत्तर–मध्यक हे त्याच्या देशनांकाचे सूत्र आहे. आधार–वर्षातील राशी व दिलेल्या वर्षातील राशी हे ज्याचे भार आहेत अशा वास्तविक बाजार-भावांच्या समूहनाचा गुणोत्तर–मध्यक हे त्या सूत्राचे सार होय. ते सूत्र असे:—

$$\sqrt{\frac{यो\ (त_{इ}\ थ_{०})}{यो\ (त_{०}\ थ_{०})} \times \frac{यो\ (त_{इ}\ थ_{इ})}{यो\ (त_{०}\ थ_{इ})}} \qquad (८१)$$

सारणी–३९

संयुक्त संस्थानांतील धातूंच्या ठोक बाजारभावाची देशनांक–संगणना : वास्तविकाचे भारित स

(१९२६ ह्या आधार–वर्षांतील उत्पादन–राशीने भारित.)

धातू	एकक	किंमत त$_0$	१९
			उत्पादन थ$_0$
अशोधित लोखंड	टन	डॉ. २०.४२००	३९,३७३
तांबे	पौंड	.१३९३	१,७४४,८६०
अल्युमिनियम	पौंड	.२६९९	१४५,०००
शिसे	पौंड	.०८२५	१,४१६,२८०
जस्त	पौंड	.०७३७	१,२३६,८००
टिन	पौंड	.६२११	६२,७१९
चांदी	औंस	.६५३६	१७२,७९०

धातू	एकक	१९२८		किंमत
		किंमत $त_1$	$त_1 थ_0$	$त$
अशोधित लोखंड	टन	डॉ. १७·६८००	डॉ. ६९६११४·६४	डॉ. १७·
तांबे	पौंड	.१४६८	२५६१४५·४५	·
अल्युमिनियम	पौंड	·२३९०	३४६५५·००	·
शिसे	पौंड	·०६१४	८६९५९·५९	·
जस्त	पौंड	·०६०३	७४५७९·०४	·
टिन	पौंड	·५८१८	३६४८९·९१	·
चांदी	औंस	·५०३९	८७०६८·८८	·
			डॉ. १,२७२,०१२·५१	

सारणी–४०

संयुक्त संस्थानांतील धातूंच्या ठोक बाजारभावांची देशनांक–संगणना : वास्तविकान्ने भारित–

(दिलेल्या वर्षांतील उत्पादन–राशीने भारित.)

(आधार–कालखंड) १९२६

धातू	एकक	किंमत	१९२६ किंमत	१९२६ उत्पादन	
		$त_0$	$त_1$	$थ_1$	$त_1$ $थ_1$
[ऽ]ोधित लोखंड	टन	डॉ. २०·४२००	डॉ. १७·६८००	३८१५६	डॉ. ६७४५
तांबे	पौंड	·१३९३	·१४६८	१८१८२८०	२६६९
[अ]ल्युमिनियम	पौंड	०·२६९९	·२३९०	२१०,०००	५०१
शिसे	पौंड	·०८२५	·०६१४	१,३०२,२८०	७९९
जस्त	पौंड	·०७३७	·०६०३	१,२३९,१८०	७४७
टिन	पौंड	·६५२६	·५०३९	१,७४,६५०	८८,००
चांदी	औंस	·६२११	·५८१८	५८,४६३	३४,०
					डॉ.१२६८४

धातू	एकक	१९३० किंमत $त_२$	उत्पादन $थ_२$	$त_२थ_२$
अशोधित लोखंड	टन	डॉ. १७·१७००	३१,३९९	डॉ. ५३९,१२०·८३
तांबे	पौंड	·१३११	१,३८०,९६०	१८१,०४३·८६
अल्युमिनियम	पौंड	·२३३९	२२९,०००	५३,५६३·१०
शिसे	पौंड	·०५३८	१,२३०,२२०	६६१८५·८४
जस्त	पौंड	·०४५६	१,२०८,६४०	४५,९९३·९८
टिन	पौंड	·३१६३	१८०९४०	५७,२३१·३२
चांदी	औंस	·३८१५	५०२३४	१९,१६४·२७
				डॉ. ९६२,१३०३·२०

सारणी–४१

संयुक्त संस्थानांतील धातूंच्या ठोक बाजारभावांची देशनांक–संगणना सापेक्षांचे भारित–

(दिलेल्या वर्षातील उत्पादन–राशीने भारित)

आधार कालखंड १९२६

धातू	एकक	१९२६		१९२८
		किंमत ($त_0$)	सापेक्ष ($त_0/त_0$)	किंमत ($त_1$)
अशोधित लोखंड	टन	२०·४२००	१००%	१७·६८८०
तांबे	पौंड	·१३९३	१००	·१४६८
अल्युमिनियम	पौंड	·२६९९	१००	·२३९०
शिसे	पौंड	·०८२५	१००	·०६१४
जस्त	पौंड	·०७३८	१००	·०६०३
टिन	पौंड	·६५३६	१००	·५०३९
चांदी	औंस	·६२११	१००	·५८१८

धातू	एकक	१९२८		१९३०		
		$त_1 थ_1$	सापेक्ष × भार $\frac{त_1}{त_0} \times त_1 थ_1$	किंमत ($त_2$)	सापेक्ष ($त_2 / त_0$)	उत्पादन ($थ_2$)
अशोधित लो.	टन	६७४,५९८·०८	५८४,२०१·९४	१७·१७००	८४·१%	३१३९९
तांबे	पौंड	२६६,९२३·५०	२८१,३३७·३७	·१३११	९४·१	१३८०९६०
अल्युमिनियम	पौंड	५०,११०·००	४४,४६८·३४	·२३९९	८६·७	२२९०००
शिसे	पौंड	७९,१५९·९९	५९,४९०·२३	·०५३८	६५·२	१२३०२२०
जस्त	पौंड	७४,७२२·५५	६१,१२३·०५	·०४५६	६१·९	१००८६४०
टिन	पौंड	८८,००६·१४	६७,८५२·७३	·३१६२	४८·४	१८०९४०
चांदी	औंस	४९,७२२·३७	४६,५८९·८६	·३८१५	६१·४	५०२३४
		१२८४१२२·६३	१४५०६३·५२			

देशनांकाप्रत्यर्थ समन्विक्षाः समय उत्क्राम्यता समन्विक्षा.

ह्या नियमानुसार आधारवर्षावर आधारित चालू वर्षाचे, तसेच चालू वर्षावर आधारित आधारवर्षाचे, देशनांक एकमेकांस पूरक आणि परस्परावलंबी असतात. १९२६ हे आधार–वर्ष धरून १९२८ करिता देशनांक २·०० आला तर १९२८ हे आधारवर्ष धरल्यास १९२६ चा देशनांक ०·५ होईल:

	१९२६		१९२८
देशनांक अ.	१·००	X	२·००
ब.	·५०		१·००

बाणाने दाखविल्याप्रमाणे ह्या दोन्ही देशनांकांचा गुणाकार केल्यास त्यांचे वज्र–गुणनफल १·०० येते; कारण हे अंक एकमेकांचे व्युत्क्रम आहेत.

कारक उत्क्राम्यता समन्विक्षा

बाजारभावांचे बदल व राशीतील बदल ह्यांचा गुणाकार त्याच वस्तूच्या एकूण किंमतीतील बदलाबरोबर असतो.

बाजारभावांच्या देशनांकाचे सूत्र असे:

$$\text{यो}\,(\text{त}_{\text{ड}}\,\text{थ}_{\circ})\,/\,\text{यो}\,(\text{त}_{\circ}\,\text{थ}_{\circ}) \qquad (८२)$$

ह्यावरून उत्पादन–राशी देशनांक हवा असल्यास वरील सूत्रात 'त'च्या ऐवजी 'थ' व 'थ'च्या ऐवजी 'त' ठेवल्यास आवश्यक राशिदेशनांक प्राप्त होतो.

$$\text{यो}\,(\text{थ}_{\text{ड}}\,\text{त}_{\circ})\,/\,\text{यो}\,(\text{थ}_{\circ}\,\text{त}_{\circ}) \qquad (८३)$$

उत्पादन–अर्हा–देशनांक हा वरीलप्रमाणेच दिलेल्या कालखंडातील उत्पादनाच्या एकूण किंमतीचा ($\text{फा}_{\text{ड}}$) आधारवर्षाच्या एकूण किंमतीशी ($\text{फा}_{\circ}$) जो अनुपात असतो त्याच्याबरोबर होय.

$$\frac{\text{यो}\,(\text{त}_{\text{ड}}\,\text{थ}_{\circ})}{\text{यो}\,(\text{त}_{\circ}\,\text{थ}_{\circ}} \times \frac{\text{यो}\,(\text{थ}_{\text{ड}}\,\text{त}_{\circ})}{\text{यो}\,(\text{थ}_{\circ}\,\text{त}_{\circ})} = \frac{\text{फा}_{\text{ड}}}{\text{फा}_{\circ}} \qquad (८४)$$

परन्तु, $\text{फा}_{\text{ड}} = \text{यो}\,(\text{त}_{\text{ड}}\,\text{थ}_{\text{ड}})$

आणि, $\text{फा}_{\circ} = \text{यो}\,(\text{त}_{\circ}\,\text{थ}_{\circ})$

म्हणून—

$$\frac{\text{यो}\,(\text{त}_{\text{ड}}\,\text{थ}_{\circ})}{\text{यो}\,(\text{त}_{\circ}\,\text{थ}_{\circ})} \times \frac{\text{यो}\,(\text{थ}_{\text{ड}}\,\text{त}_{\circ})}{\text{यो}\,(\text{थ}_{\circ}\,\text{त}_{\circ})} = \frac{\text{यो}\,(\text{त}_{\text{ड}}\,\text{थ}_{\text{ड}})}{\text{यो}\,(\text{त}_{\circ}\,\text{थ}_{\circ})} \qquad (८५)$$

कारक–उत्क्राम्यता समन्विक्षेकरिता वरील सूत्र उपयोगात आणतात.

राशि–देशनांक

बाजारभावातील बदल देशनांकाने मोजता येतात; त्याचप्रमाणे वस्तू
उत्पादनराशीतील बदलही देशनांकाने मोजणे शक्य आहे.

व्यापार–उदीमातील हालचाल, औद्योगिक उत्पादन, वस्तूंचा संग्र
वगैरेतील बदल मोजण्यासाठी राशिदेशनांकाचा उपयोग होतो.

बाजारभावाचे देशनांक तयार करताना ज्या रीती उपयोगात आणत
त्याच रीती राशिदेशनांकाकरताही उपयोगी पडतात. सर्वांत सोपी रचना अभ
रित असंयुक्त–समूहनाची होय.

$$यो\ (थ_{ह}) / यो\ (थ_{०}) \qquad (८६$$

ज्यात—

$यो\ (थ_{ह})$=हव्या असलेल्या कालखंडातील राशींचा योग.

$यो\ (थ_{०})$=आधार–कालखंडातील राशियोग.

राशिदेशनांकात निरनिराळ्या श्रेणींची बेरीज आवश्यक असते. याकरि
त्यातील अनेक श्रेणी एकाच समान अशा एककात असणे श्रेयस्कर होय. त्या
सर्व राशींचा योग घेता येतो.

श्रेणीतील निरनिराळी पदे वेगवेगळ्या एककात असल्यास व त्यांचा अभ
रित देशनांक हवा असल्यास सापेक्ष–माध्य रीती उपयोगात आणावी. समान्त
मध्यकेचा माध्य म्हणून उपयोग केल्यास देशनांकाचे सूत्र येणेप्रमाणे :

$$यो\ (थ_{ह} / थ_{०}) / डा \qquad (८७$$

राशिदेशनांकातील निरनिराळ्या पदांना विविध महत्त्व प्राप्त व्हावे म्हण
त्यांना भारित करणे सर्वसाधारणतः इष्ट असते. भारण म्हणून त्या वस्तूची किंम
अथवा इतर योग्य तो भार वापरावा.

राशीतील हे बदल मोजण्यासाठी ज्या भारितसमूहनाचा उपयोग करता
त्याचे सूत्र येणेप्रमाणे :

$$यो\ (थ_{ह}\ त_{०}) / यो\ (थ_{०}\ त_{०}) \qquad (८८$$

ज्यात ‘ आधारवर्ष ’–भार म्हणून वापरण्यात येते.

किंवा

$$यो\ (थ_{ह} \cdot त_{ह}) / यो\ (थ_{०} \cdot त_{०}) \qquad (८९$$

ज्यातही ‘ आधार–वर्षच ’ भार म्हणून वापरले जाते.

राशीतील सर्व पदांचे (अथवा वस्तूंचे) एकक सारखे-समान नसतील तर भार म्हणून त्या वस्तूंच्या बाजारभावांचा उपयोग करावा. इतर कोणत्याही भारांचा इच्छेप्रमाणे उपयोग करू नये; कारण मग त्यांचा योग घेणे जमणार नाही.

राशीतील वस्तूंचे एकक निराळे असल्यास व इच्छेप्रमाणे भाराचा उपयोग देशनांक-गणनेत हवा असल्यास सापेक्ष-भारित माध्य-रीती उपयोगात आणावी.

$$\frac{\text{यो}\left(\frac{\text{थ}_{\text{ड}}}{\text{थ}_{\circ}} \times \text{भार}\right)}{\text{यो (भार)}} \qquad (९०)$$

आदर्श-देशनांकही राशिरूपांत बदलता येतो.

$$\sqrt{\frac{\text{यो}(\text{थ}_{\text{ड}}\,\text{त}_{\circ})}{\text{यो}(\text{थ}_{\circ}\,\text{त}_{\circ})} \times \frac{\text{यो}(\text{थ}_{\text{ड}}\,\text{त}_{\text{ड}})}{\text{यो}(\text{थ}_{\circ}\,\text{त}_{\text{ड}})}} \qquad (९१)$$

प्रकरण १४

निदर्शन नियम

इयत्तात्मक न्यासाचे विश्लेषण सांख्यिकीय प्रक्रियेने करण्यात येते. इयत्तात्मक न्यास अति विस्तृत प्रमाणावर असेल तर मात्र त्याची हाताळणी संपूर्णपणे शक्य होत नाही. याकरिता त्या न्यासातील काही अंश **निदर्शन** म्हणून निवडण्यात येतो व मग त्या निदर्शनाचे सांख्यिकीय प्रक्रियेने विश्लेषण करून त्यावरून संपूर्ण इयत्तात्मक न्यासाचे सामान्यकरण करण्यात येते.

निदर्शनातून प्राप्त होणारे परिणाम जर अभ्यासिलेल्या बाबीपर्यंत अथवा वर्गापर्यंतच सीमित असतील तर त्या निदर्शनावरून संपूर्ण इयत्तात्मक न्यासाचे वर्णन करणे हा आपला उद्देशही सफल होईल. परन्तु त्याकरिता निवडलेले निदर्शन हे एकूण इयत्तात्मक न्यासाचे संपूर्ण प्रातिनिधित्व करणारे असावयास हवे. तसे नसेल तर निदर्शनात न सामावणाऱ्या बाबींविषयी अशा तऱ्हेचे कोणतेही सामान्यकरण खरे ठरणार नाही.

इयत्तात्मक न्यासाचे संपूर्ण विश्लेषण हवे असेल तर त्याकरिता बरीच शक्ति, पैसा व वेळ ही घालवावी लागतात. म्हणूनच अशा न्यासाच्या अथवा **समग्राच्या** फक्त एका अंशाचेच लक्षण अभ्यासिण्याकडे अधिक प्रवृत्ती आढळून येते. ह्या प्रक्रियेस निदर्शन म्हणतात. न्यादर्शावरून समग्राविषयीचे सत्य परिणाम प्राप्त होण्याकरिता (१) न्यादर्श हा समग्राचा प्रातिनिधिक असावयास हवा. (२) विश्लेषणार्थ उपयोगात आणलेल्या सांख्यिकीय प्रक्रियेवरही हे बहुतांशी अवलंबून असते.

भौतिक शास्त्रांत जेव्हा अधिक न्यास गोळा करणे अशक्यप्राय होते, तेव्हा निदर्शनाचा अवलंब करणे हितकर ठरते. एखादा शास्त्रीय प्रयोग दहा वेळा करून, त्या प्रयोगाच्या परिणामावर आधारित सामान्यकरण हे जणू काही तो प्रयोग अनन्त वेळा करून त्यापासून काढलेल्या निष्कर्षाइतपतच सत्य आहे असे धरून चालण्यात येते.

शाळेतून तिसऱ्या इयत्तेत शिकणाऱ्या मुलांचा बुद्धि–अंक हवा असल्यास निदर्शनाव्यतिरिक्त इतर रीती वापरल्यास अमर्याद असा न्यास प्राप्त होऊ शकेल; पण त्यामुळे पैशाची व वेळेची मात्र नसती हानी होईल. मुंबई शहरातील धान्याचे बाजारभाव हवे असल्यास शहरातील सर्व किराणा व इतर स्टोअर्समधील बाजारभावांचे संपूर्ण अधिक्षण अशक्य नाही. परन्तु पैशाची व वेळेची बचत हवी असेल तर निव्वळ किराणा दुकानातलेच बाजारभाव घेतले तर निदर्शन खात्रीने दूषित ठरेल. प्रातिनिधक असे बाजारभाव हवे असल्यास सर्व प्रकारची दुकाने, स्टोअर्स,

वगैरेंचे बाजारभाव घ्यायला हवेत. तांत्रिक भाषेत ह्यालाच "समग्रातून न्यादर्शांची निवड" असे म्हणतात.

प्रातिनिधिक निदर्शनाच्या अपेक्षा अशा :

(१) निदर्शन हे अभिनतिरहित असावे.

(२) निदर्शनाचे संघटक स्वतंत्र असावे.

(३) ज्या भागातून अथवा क्षेत्रातून न्यास निवडावयाचा, त्या भागात मूलभूत फरक नसावा.

(४) निदर्शनातील एककावर घातलेले प्रतिबन्ध समान असावे.

अशा रीतीने निवडलेला न्यादर्श हा समग्राचा प्रातिनिधिक असतो.

न्यादर्शावरून संगणित केलेल्या मापांकाद्वारे समग्राच्या लक्षणाचे वर्णन करावयाचे असल्यास ह्या मापांकाची विश्वसनीयता किती ह्याचे आगणन व्हावयास हवे. ह्यासच न्यादर्शाच्या विभ्रमाची मात्रा ठरविणे असे म्हणतात.

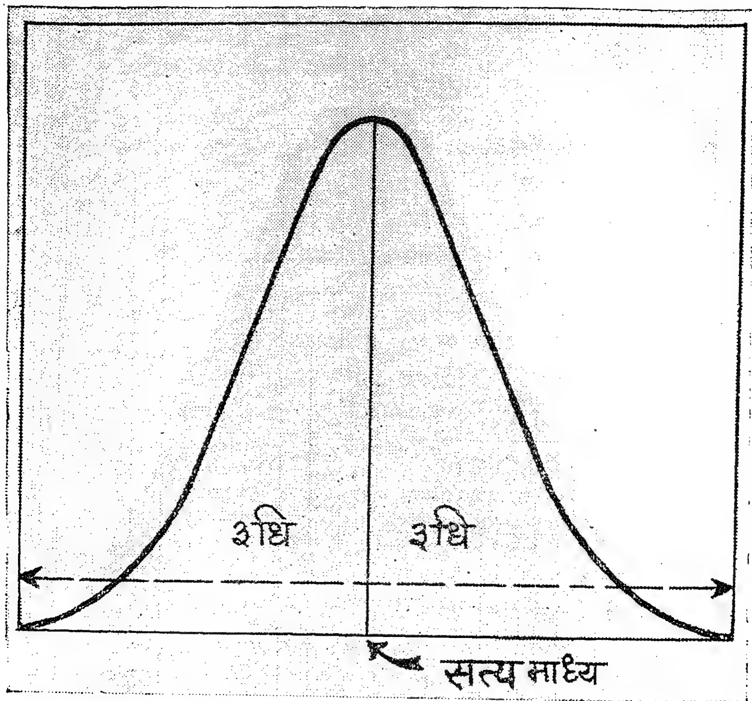
विश्वसनीयता व सार्थकतेचे माप–प्रमाप विभ्रम :

मुंबईतील बाजारभावांच्या बाबतीत थोडा वेळ आपण असे समजू या की, एका विशिष्ट वस्तूच्या विशिष्ट दिवशीच्या किंमती गोळा करण्याकरिता एक हजार अन्वेषक शहरात पाठविण्यात आले. त्यांनी गोळा केलेल्या ह्या माध्य–किंमती जर वारंवारता–बंटनात ग्रथित केल्या तर त्यापासून आपणास एक 'प्रसामान्य–बंटन' मिळते.

ह्या १००० बाजारभावांचा माध्यहि साधारणतः मूळ न्यासातील जो माध्य आहे तेवढाच, अथवा त्याच्या इतपतच, असलेला आढळून येईल. अमार्यादित पदे वरील बंटन–वक्रात समाविष्ट आहेत असे मानल्यास मुंबईतील त्या वस्तूंच्या बाजारभावाचा सत्य माध्य हा त्या वारंवारता–बंटनाचा माध्य काढल्याने आपणास प्राप्त होतो.

आकृती २८ मधील प्रसामान्य–बंटनावरून लक्ष्यांत येईल की काही न्यादर्शांचे माध्य हे समग्राच्या माध्यापेक्षा अगदीच वेगळे आहेत. न्यादर्श–माध्याचे हे अन्तर माहीत झाल्यास अधिकात अधिक विभ्रम किती आहे हे कळते. प्रसामान्य–वक्राच्या बाबतीत ९९·७ प्रतिशत बाबी माध्यापासूनच्या दुतर्फा तीन प्रमाप–विचलन एवढ्या अन्तरात आढळून येतात. बंटनाच्या ह्या प्रमाप–विचलनाची अर्हा माहीत झाल्यास १०० पैकी ९९·७ अवसरात एकही विभ्रम (न्यादर्श माध्य आणि सत्य माध्य यांतील फरक) असा आढळून येणार नाही की जो प्रमाप–विचलनाच्या तिपटीपेक्षा जास्त आहे.

माध्यापासून तयार केलेल्या बंटनाच्या प्रमाप–विचलनास **"माध्याचा प्रमाप–विभ्रम" असे म्हणतात.**



आकृती २८ : दिलेल्या समग्रातून घेतलेल्या समसंभावी न्यादर्शांच्या बृहत्–माध्याचे सैद्धान्तिक बंटन.

पन्नास प्रतिशत बाबींपेक्षा जो विभ्रम आधिक नाही, त्यास **सम्भावी–विभ्रम** असे म्हणतात. सम्भावी–विभ्रम हा प्रमाप–विभ्रमाच्या ०·६७४५ पट असतो.

न्यादर्शात जितक्या अधिक बाबी असतील, त्यांतील विभ्रम तितकाच कमी असतो. प्रमाप–विभ्रम व न्यादर्शातील बाबी ह्यांचे प्रमाण व्यस्त असते. न्यादर्शाचे प्रमाप–विचलन हे समग्रातील विस्ताराचे माप होय. न्यादर्शापासून संगणित केलेल्या मापांकाचे प्रमाप–विभ्रम ज्या समग्रातून वरील न्यादर्श घेतला त्याच्या प्रमाप–विचलनाशी सम (प्रत्यक्ष) प्रमाणात असते.

माध्याच्या प्रमाप–विभ्रमाचे सूत्र असे :—

$$\text{धि}_{\bar{\text{य}}} = \text{धि} / \sqrt{\text{डा.}} \qquad (९२)$$

ज्यात धि = न्यादर्शाचे प्रमाप–विचलन.

माध्याचा सम्भावी-विभ्रम व माध्याच्या प्रमाप-विभ्रमातील अनुपात असा:-

सं. वि. = ०·६७४५ धि / $\sqrt{\text{डा.}}$

दिलेल्या प्रमाप-विभ्रमापेक्षा अधिक विभ्रम असण्याच्या सम्भावितेची शक्यता व त्यातील विषमता ही खालील सारणीत दिली आहे:—

सारणी-४२

निरानिराळ्या महत्तेच्या सांख्यिकीय विचलनांची त्याच्या प्रमाप-विभ्रमाशी असणारी सम्भाविता.

(१) प्रमाप-विभ्रम संख्या.	(२) दिलेल्या प्रमाप-विभ्रमा-इतपत, अथवा अधिक विचलनांची सम्भाविता.	(३) दिलेल्या प्र. वि. इतपत अथवा अधिक विचलनांची घडण्याची विषमता.
०·६७४४९	५०·००	१·०० ला$_1$
०·७	४८·३९	१·०७ ला$_1$
०·८	४२·३७	१·३६ ला$_1$
०·९	३६·८१	१·७२ ला$_1$
१·०	३१·७३	२·१५ ला$_1$
१·१	२७·१३	२·६९ ला$_1$
१·२	२३·०१	३·३५ ला$_1$
१·३	१९·३६	४·१७ ला$_1$
१·४	१६·१५	५·१९ ला$_1$
१·५	१३·३६	६·४८ ला$_1$
१.६	१०·९६	८·१२ ला$_1$
१·७	८.९१	१०·२२ ला$_1$
१·८	७·१९	१२·९२ ला$_1$
१·९	५·७४	१६·४१ ला$_1$
२·०	४·५५	२०·९८ ला$_1$
२·१	३·५७	२६·९९ ला$_1$
२·२	२·७८	३४·९६ ला$_1$
२·३	२·१४	४५·६२ ला$_1$
२·४	१·६४	६०·०० ला$_1$

(१) प्रमाप-विभ्रम संख्या.	(२) दिलेल्या प्रमाप–विभ्रमा इतपत; अथवा अधिक विचलनांची सम्भाविता.	(३) दिलेल्या प्र. वि. इतपत अथवा अधिक विचलनांची घडण्याची विषमता.
२·५	१·२४	७९·५२ ला$_{१}$
२·६	·९३२	१०६·३ ला$_{१}$
२·७	·६९३	१४३·२ ला$_{१}$
२·८	·५११	१९४·७ ला$_{१}$
२·९	·३७३	२६७·० ला$_{१}$
३·०	·२७०	३६९·४ ला$_{१}$
३·१	·१९४	५१५·७ ला$_{१}$
३·२	·१३७	७२६·७ ला$_{१}$
३·३	·०९६७	१०३३ ला$_{१}$
३·४	·०६७४	१४८३ ला$_{१}$
३·५	·०४६५	२१४९ ला$_{१}$
३·६	·०३१८	३१४२ ला$_{१}$
३·७	·०२१६	४६३७ ला$_{१}$
३·८	·०१४५	६९१५ ला$_{१}$
३·९	·००९६२	१०३९० ला$_{१}$
४·०	·००६३४	१५७७० ला$_{१}$
५·०	·००००५७३	१७४४००० ला$_{१}$
६·०	·०००००००२०	५००,०००,००० ला$_{१}$
७·०	·००००००००००२६	४००,०००,०००,००० ला$_{१}$

इतर सांख्यिकीय मापांकाचे प्रमाप–विभ्रमही अशाच तऱ्हेने संगणित होऊ शकतात. प्रमाप–विभ्रमांची यादी खाली दिली आहे.

प्रमाप–विभ्रमाचे सूत्र

मध्यक (म). $\text{धि}_{\text{य}} = \frac{\text{धि}}{\sqrt{\text{डा}}}$

मध्यका (मा). $\text{धि}_{\text{मा}} = १·२५३३ \frac{\text{धि}}{\sqrt{\text{डा.}}}$

प्रमाप-विचलन (धि). $\text{धि}_{\text{धि}} = \frac{\text{धि}}{\sqrt{\text{२ डा}}}$

मध्यक-विचलन (रि) $\text{धि}_{\text{रि}} = ०·६०२८ \frac{\text{धि}}{\sqrt{\text{डा}}}$

विचरण-मापांक (फा) $\text{धि}_{\text{फा}} = \frac{\text{फा}}{\sqrt{\text{२ डा}}} \sqrt{१ + २ (\text{फा})^{२}}$

सहसम्बन्ध-मापांक (द) $\text{धि}_{\text{द}} = \frac{१ - \text{द}^{२}}{\sqrt{\text{डा}}}$

संभावि–

स. वि.$_{(\text{य})}$ = ·६७४५ धि / √ड

स. वि. (मा) = ·८४५३५

स. वि. (धि) = ·६७४५

स. वि. (रि) = ·४०६६

स. वि. (फा) = ·६७४५

स. वि. (द) = ·६७४५

प्रमाप–विभ्रमाचे सूत्र

अनुस्थिती सहसम्बन्ध (दि) :

$$\text{धि (दि)} = \frac{१-\text{दि}^{२}}{\sqrt{\text{डा.}}}\left(१+\cdot ०८६\ \text{दि}^{२}+\cdot ०१३\ \text{दि}^{४}+\cdot ००२\ \text{दि}^{६}\right)$$

बहुगुण सहसम्बन्ध ($\text{दा}_{१} \cdot २३\ldots \text{ड}$)

$$\text{धि}_{\text{दा}\ १\cdot २३\ldots \text{ड}} = \frac{१-\text{दा}^{२}\ १\cdot २३\ldots \text{ड}}{\sqrt{\text{डा.}}}$$

आंशिक सहसम्बन्ध

$$\text{धि}_{\text{द}\ १२\cdot ३४\ldots \text{ड}} = \frac{१-\text{द}^{२}\ १२\cdot ३४\ldots \text{ड}}{\sqrt{\text{डा.}}}$$

संभावि-

$$\text{स. वि. (दि)} = \cdot ६७४५\ \frac{१\ldots}{}$$

$$\text{स. वि.} (\text{दा}_{१\cdot २३\ldots \text{ड}})$$

$$\text{स. वि.}_{\text{द.}\ १२\cdot ३४\ldots \text{ड}}$$

दोन माध्यांतील अन्तराची सार्थकता

दोन न्यादर्शांचे माध्यांतील फरक (अन्तर) सार्थ आहे किंवा नाही, किंवा सदर अन्तर हे निव्वळ अवसरामुळे उद्भवले आहे हे तपासून पाहणेही बरेच वेळा इष्ट असते.

शास्त्रीय क्षेत्रातील प्रयोग हे नियन्त्रणाधारे केले जातात. तुलनेचा आधार म्हणून मग ह्या नियन्त्रित प्रयोगाचा उपयोग होतो. त्या उलट ज्यांचे परिणाम शोधून काढावयाचे असतात अशा शास्त्रातील नवनवीन प्रक्रिया नेहमीच नियन्त्रणापासून मुक्त असतात. प्रयोगांचे अशा तऱ्हेने दोन विभाग पडतात : (१) नियन्त्रित वर्ग विभाग. (२) प्रायोगिक वर्ग विभाग. या दोन वर्गांच्या मापांकित परिणामातील फरक सार्थ आहे किंवा नाही हे मग तपासून पाहावे.

एकाच न्यासापासून दोन न्यादर्श निवडले तर त्यांच्या माध्यात अन्तर असल्याचे आढळून येईल. न्यादर्शातील पदे निवडताना जे विचरण उद्भवते त्यामुळे हे अन्तर येते. ‘ अवसरामुळे हे अन्तर उद्भवते ’ असे सांख्यिकीत म्हणतात.

एका समग्रापासून अनेक न्यादर्श तयार केले; त्यांचे माध्य घेतले; व मग त्या निरनिराळ्या माध्यांतील अन्तरापासून एक वारंवारता बंटन तयार केले, तर येणारे हे बंटनही प्रसामान्यच असेल. वरील सर्व न्यादर्श एकाच समग्रापासून काढलेली असल्याने, खरोखरी पाहता न्यादर्शातल्या माध्यात फरक असू नये. तेव्हा फरक असल्यास तो निव्वळ अवसरामुळेच उद्भवला असे समजावयास हरकत नाही.

वरील परिस्थिती प्रसामान्य वक्राने दर्शित करणे शक्य आहे.

प्रसामान्य वक्राविषयी जे काही आतापर्यंत सांगून झाले आहे, त्यावरून कळून येईल की असले १०० त ९९·७ टक्के कोणतेही अन्तर बंटनाच्या ३ प्रमाप विचलनापेक्षा अधिक असणार नाही. यदाकदाचित हा वास्तविक फरक ३ प्रमाप विचलनापेक्षा अधिक असला (म्हणजे त्याची सम्भाविता अतिशय लहान असली) तर तो फरक सार्थ आहे असे समजावे, मग असला फरक अवसरामुळे उद्भवला नाही असे म्हणता येईल.

दोन माध्यांतील अन्तराचे प्रमाप-विभ्रम खालील सूत्रावरून निश्चित करणे शक्य आहे

$$\text{धि}_{\text{घा}} = \underline{\sqrt{\text{धि}_{\bar{\text{य}}_1}^{2} + \text{धि}_{\bar{\text{य}}_2}^{2}}}$$

$$= \sqrt{\text{धि}_1^{2} / \text{डा}_1 + \text{धि}_2^{2} / \text{डा}_2} \qquad (९३)$$

ज्यात, $धि_१$ = पहिल्या न्यादर्शाचे प्रमाप–विभ्रम.

$धि_२$ = दुसऱ्या न्यादर्शाचे प्रमाप–विभ्रम.

$डा_१$ = पहिल्या न्यादर्शातील एकूण पदे.

$डा_२$ = दुसऱ्या न्यादर्शातील एकूण पदे.

खालील उदाहरण पाहा—

कालिक अभ्यासाचा परिणाम म्हणून एका फॅक्टरीत एका प्रक्रियेकरिता नवीन पद्धती लावून पाहण्याचे ठरले. जुन्या पद्धतीप्रमाणे त्या प्रक्रियेच्या पन्नास प्रयत्नांस लागणाऱ्या वेळेचा माध्य १७·५ सेकन्द व त्याचे प्रमाप–विचलन १·५ सेकन्द एवढे होते. नवीन पद्धती आत्मसात केल्यावर त्याच प्रक्रियेच्या पन्नास प्रयत्नांस लागणाऱ्या वेळेचा माध्य १५ सेकन्द व प्रमाप–विचलन १·२ सेकन्द एवढे आले. वर दर्शविल्याप्रमाणे ह्या दोन वेळेच्या माध्यांतील अन्तर २·५ सेकन्द हे खरोखरीच सार्थ आहे की निव्वळ अवसरामुळे येते ?

$$धि_{घा} = \sqrt{\frac{(१·५)^2}{५०} + \frac{(१·२)^2}{५०}} = ०·२७ \text{ सेकन्द.}$$

दोन माध्यांतील अन्तराच्या तीन प्रमाप-विभ्रम म्हणजे (·२७×३=०·८१) सेकन्द एवढे अन्तर निव्वळ अवसरामुळे शक्य आहे. पण येणारे अन्तर म्हणजे २·५ सेकन्द हे ०·८१ सेकन्दापेक्षा कितीतरी अधिक असल्याने निव्वळ अवसरामुळेच हा फरक आला आहे, असे म्हणता येणार नाही.

दोन न्यादर्शांपासून आगणित दोन सांख्यिकीय मापांकातील अन्तर सार्थ आहे किंवा नाही, हे खालीलप्रमाणे ठरवावे—

(अ) दोन न्यादर्शांत सहसम्बन्ध असल्यास :

$$धि_{घा} = \sqrt{धि^2_{ऊ_१} + धि^2_{ऊ_२} - २द_{१२} \cdot धि_{ऊ_१} \cdot धि_{ऊ_२}} \quad (९४)$$

ज्यात,

$धि_{ऊ_१}$ = न्यादर्श १ पासून आगणित अशा 'ऊ' मापांकाचे प्रमाप-विभ्रम.

$धि_{ऊ_२}$ = न्यादर्श २ पासून आगणित अशा 'ऊ' मापांकाचे प्रमाप-विभ्रम.

(ब) न्यादर्शांत सहसम्बन्ध नसल्यास

$$धि_{घा} = \sqrt{धि^2_{ऊ_१} + धि^2_{ऊ_२}} \quad (९५)$$

अनुपातातील अन्तराची सार्थकता

दोन समसम्भावी न्यादर्श घेऊन त्यातील एखादे लक्षण अनुपातात असल्यास त्या अनुपातातील अन्तर सार्थ आहे, अथवा निव्वळ अवसरामुळे उद्भवले आहे, हे खालील सूत्रावरून काढता येईल.

$$\text{धि}_{\text{घा}\%} = \sqrt{\text{त. थ.} \left(\frac{१}{\text{डा}_१} + \frac{१}{\text{डा}_२} \right)} \qquad (९६)$$

ज्यात,

त = कोणत्याही कृत्याची एकूण प्रतिशतता.

थ = १ – त.

$\text{डा}_१$ = पहिल्या न्यादर्शांतील एकूण पदे.

$\text{डा}_२$ = दुसऱ्या न्यादर्शांतील एकूण पदे.

सूचक शब्दांची परिणामकारकता तपासण्याच्या एका अभ्यासात असे आढळून आले की विचारलेल्या प्रश्नात तो सूचक शब्द ओळखू शकण्याचे पुरुषांचे व स्त्रियांचे प्रमाण अनुक्रमे ७५·७ व ६६·३ असे पडले. सदर टक्केवारीतील हे अन्तर सार्थ आहे की नाही हे वरील सूत्राधारे खालीलप्रमाणे तपासता येईल.

पॅरिस–गार्टर–सूचक शब्दांच्या समान्विक्षेचे परिणाम.

३७४ विद्यार्थ्यांची चाचणी.

	सूचक शब्द ओळखणाऱ्यांची संख्या	प्रतिशत	एकूण
पुरुष	२०९	७५·७	२७६
स्त्रिया	६५	६६·३	९८
एकूण	२७४	७३·३	३७४

त = ७३·३ % थ = २६·७ %

$$\therefore \text{धि}_{\text{घा}\%} = \sqrt{(·७३३)(·२६७)\left(\frac{१}{२७६} + \frac{१}{९८}\right)}$$

$$= ·०५२ = ५·२\%$$

वरील दोन अनुपातांतील अन्तर ९·४% (७५·७ – ६६·३) हे प्रमापविचलनाच्या १·८१ पट आहे. म्हणजे १०० पैकी जवळ जवळ ७ पेक्षा थोड्या अधिक अवसराने सदर अन्तर हे न्यादर्शांतील अवसराच्या विचरणामुळे उद्भवले असे म्हणता येईल.

मापांकाचे प्रमाप–विभ्रम

भौतिक मापांकातून सुद्धा काही अंशी विचरण संभवते. एखादे अन्तर वारंवार मोजल्यास अथवा एखादी वस्तू वारंवार वजन केल्यास, येणारे परिणाम तपासून पाहता त्यात विचरणाचा अल्पसा तरी अंश आढळून येईल.

अनेक मापांकांतील येणारा माध्य हा सत्य मापांक मानल्यास सदर मापांक हा न्यादर्शापासून प्राप्त झाला आहे असे गृहीत धरण्यास काहीच हरकत नाही. अशा प्रकारच्या न्यादर्शातून असणारा ‘ निदर्शन–विभ्रम ’ आगणित होऊ शकतो. एखाद्या वस्तूचे दहा वेळा मापन केल्यास येणारे दहा मापांक हे अमर्याद अशा त्या ‘ मापांक–समग्राचा ’ एक न्यादर्श होय असे मानता येईल.

अशा ह्या निदर्शनाच्या माध्याचा विभ्रम संभावि–विभ्रम अथवा प्रमाप–विभ्रमाद्वारे आगणित होऊ शकतो.

(१) न्यादर्श मोठा असेल तर : ($डा > ३०$)

$$धि_{\bar{य}} = धि / \sqrt{डा} \qquad (९७)$$

किंवा

$$\text{सं. वि.} (\bar{य}) = \cdot ६७४५ \, धि / \sqrt{डा}$$

(२) न्यादर्श लहान असल्यास : ($डा < ३०$)

$$धा_{\bar{य}} = धा / \sqrt{डा} \qquad (९८)$$

क्षेत्रफळ, घनफळ, वगैरेकरिता अशा तऱ्हेचे मापांक हे बव्हंशी एकत्रित करावे लागतात. अशा एकत्रित अर्हेचे प्रमाप–विभ्रम शोधून काढणेही आवश्यक असते.

(१) वैयक्तिक असे मापांक एकत्रित केल्यास त्यांचे प्रमाप–विभ्रम पुढील तऱ्हेने काढावे.

$$धि_{\bar{य}_१ + \bar{य}_२ + \bar{य}_३ \cdots \bar{य}} = धि_{\bar{य}_१}^२ + धि_{\bar{य}}^२ + धि_{\bar{य}}^२ + \cdots + धि_{\bar{य}}^२ \qquad (९९)$$

दोन बिन्दूंतील अन्तर माहीत होण्याकरिता ते अन्तर दोन विभागांत अनेक वेळा मोजले तेव्हा त्याचा माध्य खालीलप्रमाणे आला.

विभाग १ ... अन्तर = ५०० यार्ड.
विभाग २ ... अन्तर = ६०० यार्ड.

पहिल्या विभाग अन्तराचे प्रमाप–विभ्रम २ यार्ड होते, तर दुसऱ्या विभाग अन्तराचे प्रमाप–विभ्रम २·५ यार्ड होते. एकूण अन्तराचे प्रमाप–विभ्रम असे :—

$$\text{धि}\bar{\text{य}}_{1}^{\,२} + \bar{\text{य}}_{२} = ४ + ६\cdot२५ = १०\cdot२५ \text{ यार्ड.}$$

$$\therefore\ \text{धि}\bar{\text{य}}_{1} + \bar{\text{य}}_{२} = ३\cdot२० \text{ यार्ड.}$$

(२) सदर मापांकाच्या 'ड' घाताकरिता हे प्रमाप–विभ्रम असे :

$$\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}^{\text{ड}}}{\bar{\text{या}}^{\text{ड}}} = \text{डा}\left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}}{\bar{\text{या}}}\right) \qquad (१००)$$

एका आयताच्या एका बाजूच्या सरासरीचा माध्य. १० फूट आहे व त्याचे प्रमाप–विभ्रम ०·५ फूट आहे. त्याच्या क्षेत्रफळाचे प्रमाप–विभ्रम खालील प्रकारे येईल.

$$\text{क्षेत्रफळ} = (\text{ लांबी })^{२} = १०^{२} = १०० \text{ स्के. फूट.}$$

$$\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}^{\text{ड}}}{१००} = २\left(\frac{\cdot०५}{१०}\right) = ०\cdot१ \text{ स्के. फूट.}$$

(३) प्रमाप–विभ्रम माहीत आहे अशा माध्यांच्या एका श्रेणीच्या गुणन–फलाचा प्रमाप–विभ्रम हा —

$$\left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}_{1}\cdot\bar{\text{य}}_{२}\cdots\bar{\text{य}}^{\text{ड}}}{\bar{\text{या}}_{1}\cdot\bar{\text{या}}^{२}\cdots\bar{\text{या}}_{\text{ड}}}\right)^{२} = \left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}_{1}}{\bar{\text{या}}_{1}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}_{२}}{\bar{\text{या}}_{२}}\right)^{२} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}^{\text{ड}}}{\bar{\text{या}}_{\text{ड}}}\right)^{२} \qquad (१०१)$$

(४) लब्धीचा प्रमाप–विभ्रम हा

$$\left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}_{1}\ /\ \bar{\text{य}}_{२}}{\bar{\text{या}}_{1}\ /\ \bar{\text{या}}_{२}}\right)^{२} = \left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}_{1}}{\bar{\text{या}}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{धि}\bar{\text{य}}_{२}}{\bar{\text{या}}_{२}}\right)^{२} \qquad (१०२)$$

ह्या सूत्राने उपलब्ध होऊ शकेल.

एक वर्तुळाकृती हौद आहे. त्याच्या उंचीचे व त्रिज्येचे मापांक आणि प्रमाप–विभ्रम असे:—

त्रिज्या = १० फूट (द). उंची = २० फूट (ज)

$$\text{फा} = \text{प्या} \times \text{द}^{२}\cdot\text{ज} = ३\cdot१८१५९\ (१०)^{२}\cdot(२०) = ६२८३\cdot१८$$

आणि $\text{धि}_{\text{द}} = ०\cdot१$ फूट; $\text{धि}_{\text{ज}} = ०\cdot२$ फूट.

$\text{द}^{२}$ चे प्रमाप–विभ्रम असे:—

$$\frac{\text{धि}_{\bar{\text{य}}^{\text{ड}}}}{\bar{\text{या}}^{\text{ड}}} = \text{डा.}\ \frac{\text{धि}_{\bar{\text{य}}}}{\bar{\text{या}}} = \frac{\text{धि}_{\text{द}^{२}}}{\text{द}^{२}} = २\,\frac{\text{धि}_{\text{द}}}{\text{द}} = \left(२ \times \frac{\cdot १}{१०} \right)$$

घनफळाचे प्रमाप–विभ्रम असे :

$$\left(\frac{\text{धि}_{\bar{\text{य}}_{१} \cdot \bar{\text{य}}_{२}}}{\bar{\text{या}}_{१} \cdot \bar{\text{या}}_{२}} \right)^{२} = \left(\frac{\text{धि}_{\bar{\text{य}}_{१}}}{\bar{\text{या}}_{१}} \right)^{२} + \left(\frac{\text{धि}_{\bar{\text{य}}_{२}}}{\bar{\text{या}}_{२}} \right)^{२} \qquad (१०३)$$

परन्तु $\text{फा} = \text{प्या} \cdot \text{द}^{२} \cdot \text{ज}.$

$$\left(\frac{\text{धि}_{\text{फा}}}{\text{फा}} \right)^{२} = \left(\frac{\text{धि}_{\text{फा}}^{\ २}}{\text{द}^{२} \cdot \text{ज}} \right) = \left(२\,\frac{\text{धि}_{\text{द}}^{\ २}}{\text{द}} \right)^{२} + \left(\frac{\text{धि}_{\text{ज}}}{\text{ज}} \right)^{२}$$

$$\left(\frac{\text{धि}_{\text{फा}}}{६२८३\cdot१८} \right)^{२} = \left(२ \times \frac{\cdot १}{१०} \right)^{२} + \left(\frac{\cdot २}{१०} \right)^{२}$$

$$\therefore\ \text{धि}_{\text{फा}} = १४०\cdot५ \text{ घनफूट.}$$

सहसम्बन्ध मापांकाची सार्थकता :

दोन श्रेणींतील सहसम्बन्ध प्रस्थापित झाल्यानंतर आलेला सहसम्बन्ध–मापांक हा खरोखरीच त्या श्रेणीतील सत्य अशा सम्बन्धाचे प्रतीक आहे किंवा नाही हे पडताळून पाहणे श्रेयस्कर होय.

न्यादर्शांच्या दोन श्रेणींत सत्य-संबंध नसूनही समग्रातून निवडलेल्या ह्या श्रेणींचा 'द' मोजणे शक्य आहे. एकाच समग्रापासून निवडलेल्या दोन न्यादर्शांच्या माध्यात फरक असतो, हे मागेच सिद्ध केले आहे. त्याचप्रमाणे सहसम्बन्ध-मापांकाची ही 'द'–अर्हाही निदर्शनातील विचलनामुळे उद्भवू शकते.

युग्म अर्हांच्या असंख्य न्यादर्शांचे सहसम्बन्ध–मापांक आगणित करून वारंवारता वंटनात मांडल्यास येणारे बंटनही प्रसामान्यच असते. ह्या बंटनातील 'द'ची अर्हा ही प्रमाप–विचलनाच्या तिपटीपेक्षा आधिक अशी फक्त अवसरामुळेच शक्य आहे. आगणित असा हा 'द', जर '$\text{धि}_{\text{द}}$' पेक्षा अधिक असेल तर १०० त ९९·७ सदर 'द' सार्थच म्हणावा लागेल.

न्यादर्शामुळे उद्भवणारा हा विभ्रम निश्चित करण्याकरिता श्रेणीतील सह-सम्बन्ध मापांकाच्या प्रमाप-विभ्रमाचे गणन माध्याच्या प्रमाप-विभ्रमाप्रमाणेच करावे.

अवलोकित व वास्ताविक 'द'च्या अर्हेतील अन्तर पन्नास टक्के तरी ०·६७४५ 'धि' पेक्षा अधिक नसते, आणि ९९·७ टक्के ते ३ $धि_{द}$ पेक्षा अधिक नसते.

सहसम्बन्ध–मापांकाच्या प्रमाप-विभ्रमाकरिता खालील सूत्र वापरावे.

$$धि_{द} = \frac{१ - द^{२}}{\sqrt{डा}} \qquad (१०४)$$

नियुक्त समग्राकरिता सहसम्बन्ध-मापांक १०० टक्क्यांपर्यंत आल्यास निदर्शन बंटन प्रसामान्य अथवा संमित असणेच शक्य नाही; कारण मग बंटनाच्या एका भागातील चरम अर्हा ह्या 'द'च्या १०० टक्के अर्हेइतपत असतील; व दुसऱ्या भागातील 'द'चा विस्तार हा त्यापेक्षाही अधिक असेल. अशा वेळेस विश्वसनीयता व सार्थकतेकरिता 'द'–ची अर्हा 'ल' मध्ये रूपांतरित करावी.

$$ल = \frac{१}{२}\left[छे_{वा}\,(१ + द) - छे_{वा}\,(१ - द) \right] \qquad (१०५)$$

सदर न्यादर्शांच्या बंटन अर्हा प्रसामान्य व संमितीय अशा असतात.

त्याचा प्रमाप-विभ्रम असा :

$$धि_{ल} = \frac{१}{\sqrt{डा - ३}} \qquad (१०६)$$

लहान न्यादर्श : माध्याचे प्रमाप–विभ्रम :

न्यादर्शात कमी पदे असल्यास (३० पेक्षा कमी) गंभीर असे विभ्रम निर्माण होतात. त्यामुळे वरील तऱ्हेचे प्रमाप-विभ्रम उपयोगाचे नाही.

न्यादर्श लहान असल्यास प्रमाप-विभ्रम नवीन तऱ्हेने आगणित करावा.

$$ध^{२} = \frac{यो\,(य)^{२}}{डा - १} = \frac{डा \cdot धि^{२}}{डा - १} \qquad (१०७)$$

$$धा_{य} = \frac{ध}{\sqrt{डा}}$$

लहान न्यादर्शांच्या बाबतीत प्रमाप-विभ्रमाच्या पटीत येणारी पदांची टक्केवारीही पूर्वीसारखी नसते. तिसांपेक्षा कमी पदे असलेल्या न्यादर्शांच्या संबंधांतील विचलनांची ही संभाविता, त्याकरिता आवश्यक अशा गुणकासह खाली दिली आहे.

ढा	५०%	९५%	९९%
१	१.०००	१२.७०६	६३.६५७
२	.८१६	४.३०३	९.९२५
३	.७६५	३.१८२	५.८४१
४	.७४१	२.७७६	४.६०४
५	.७२७	२.५७१	४.०३२
६	.७१८	२.४४७	३.७०७
७	.७११	२.३६५	३.४९९
८	.७०६	२.३०६	३.३५५
९	.७०३	२.२६२	३.२५०
१०	.७००	२.२२८	३.१६९
११	.६९७	२.२०१	३.१०६
१२	.६९५	२.१७९	३.०५५
१३	.६९४	२.१६०	३.०१२
१४	.६९२	२.१४५	२.९७७
१५	.६९१	२.१३१	२.९४७
१६	.६९०	२.१२०	२.९२१
१७	.६८९	२.११०	२.८९८
१८	.६८८	२.१०१	२.८७८
१९	.६८८	२.०९३	२.८६१
२०	.६८७	२.०८६	२.८४५
२१	.६८६	२.०८०	२.८३१
२२	.६८६	२.०७४	२.८१९
२३	.६८५	२.०६९	२.८०७
२४	.६८५	२.०६४	२.७९७
२५	.६८४	२.०६०	२.७८७
२६	.६८४	२.०५६	२.७७९
२७	.६८४	२.०५२	२.७७१
२८	.६८३	२.०४८	२.७६३
२९	.६८३	२.०४५	२.७५६
३०	.६८३	२.०४२	२.७५०

लहान न्यादर्श : इतर प्रमाप-विभ्रम

लहान न्यादर्शसम्बन्धातील इतर सांख्यिकीय मापांकांचे प्रमाप-विभ्रम खाली दिले आहेत. हे प्रमाप-विभ्रम मोठ्या न्यादर्शांतील प्रमाप-विभ्रमानुसार उपयोगात आणावे. त्याकरिता वर दिलेले अचूक असे गुणक उपयोगात आणावे.

माप :	लहान न्यादर्शाकरिता प्रमाप-विभ्रम	वरील सारणीतील डांची अर्हा
दोन माध्यांतील अन्तर	$घ^२ = \frac{यो(यो_१)^२ + यो(य_२)^२}{(डा_१-१)+(डा_२-१)}$ $धा_घ = \frac{घ}{\sqrt{\frac{डा १ \cdot डा २}{डा १ + डा २}}}$	$डां = डा_१ + डा_२$
सहसम्बन्ध मापांक	$धा_द = \frac{१ - द^२}{\sqrt{डा - २}}$	$डां = डा - २$
'ल'मध्ये सहसम्बन्ध मापांक	$धि_ल = \frac{१}{\sqrt{डा - ३}}$	मोठ्या न्यादर्शांचे गुणक वापरावे.

प्रकरण १५

वारंवारता बंटन विश्लेषण

परिघात

वारंवारता बंटनाचे अधिक परिशुद्ध विश्लेषण त्यातील अचल अथवा "परिघात" संगणित केल्यास शक्य आहे. बंटनाच्या स्पष्ट विवरणार्थ व त्याच्या सरलनार्थ जे वक्र निश्चित करावे लागते, त्याकरिताही परिघात ठरविणे इष्ट असते.

(१) स्वेच्छ मूल-बिन्दूपासून वारंवारता बंटनाचा प्रथम परिघात असा :

$$ऌ_{१} = \frac{\text{यो (च. घ)}}{\text{डा.}} \qquad (१०८)$$

(२) स्वेच्छ मूल-बिन्दूपासून वारंवारता बंटनाचा द्वितीय परिघात असा :

$$ऌ_{२} = \frac{\text{यो. च (घ}^{२}\text{)}}{\text{डा.}} \qquad (१०९)$$

(३) स्वेच्छ मूल-बिन्दूपासून वारंवारता बंटनाचा तृतीय परिघात असा :

$$ऌ_{३} = \frac{\text{यो. च (घ}^{३}\text{)}}{\text{डा.}} \qquad (११०)$$

(४) स्वेच्छ मूल-बिन्दूपासून वारंवारता बंटनाचा चतुर्थ परिघात असा :

$$ऌ_{४} = \frac{\text{यो. च (घ}^{४}\text{)}}{\text{डा.}} \qquad (१११)$$

माध्यास मूल-बिन्दू मानून ठरविलेले परिघात हेच मुख्य असतात, म्हणून—

$$ॠ_{१} = \frac{\text{यो. च (य)}}{\text{डा.}} = ० \qquad (११२)$$

$$ॠ_{२} = \frac{\text{यो. च (य}^{२}\text{)}}{\text{डा.}} \qquad (११३)$$

$$ॠ_{३} = \frac{\text{यो. च (य}^{३}\text{)}}{\text{डा.}} \qquad (११४)$$

$$ॠ_{४} = \frac{\text{यो. च. (य}^{४}\text{)}}{\text{डा.}} \qquad (११५)$$

ज्यात, य = माध्य आणि मूळ–अर्हांतील फरक.

माध्यापासूनच्या विचलनांचा योग शून्य असतो; म्हणून प्रथम परिघात नेहमी शून्याबरोबर असतो. माध्यापासूनचे इतर संगणित परिघात असे :—

$$\text{ऋ}_{२} = \text{ल}_{२} - \text{ल}_{१}^{२} \qquad (११६)$$

$$\text{ऋ}_{३} = \text{ल}_{३} - ३\cdot\text{ल}_{१}\,\text{ल}_{२} + २\cdot\text{ल}_{१}^{३} \qquad (११७)$$

$$\text{ऋ}_{४} = \text{ल}_{४} - ४\cdot\text{ल}_{१}\,\text{ल}_{३} + ६\cdot\text{ल}_{१}^{२}\,\text{ल}_{२} - ३\text{ल}_{१}^{४} \qquad (११८)$$

वर्गणाकरिता शेपर्डचे शोधन

संभागान्तरालातील सर्व अर्हा ह्या त्या संभागान्तरालाच्या मध्य-बिन्दूभोवतीच केन्द्रित झालेल्या असतात ही कल्पना वारंवारता बंटनाच्या परिघात-गणनेत गृहीत असते. ही कल्पना सर्वस्वी खरी नाही. वरील कल्पनेमुळे थोडा विभ्रम उत्पन्न होतो आणि ह्याकरिता शोधनाच्या रूपात परिघात-अर्हेत थोडीफार सूट द्यावी लागते.

(अ) प्रथम शोधित परिघात : $\text{ऋ}'_{१} = ०$ (११९)

(ब) द्वितीय शोधित परिघात : $\text{ऋ}'_{२} = \text{ऋ}_{२} - १/१२$ (१२०)

(क) तृतीय शोधित परिघात : $\text{ऋ}'_{३} = \text{ऋ}_{३}$. (१२१)

(ड) चतुर्थ शोधित परिघात : $\text{ऋ}'_{४} = \text{ऋ}_{४} - \frac{१}{२}\text{ऋ}_{२} + \frac{७}{२४०}$ (१२२)

सोयीकरिता वरील परिघात हे संभागान्तरालात संगणित केले जातात. मूळ एककात नव्हे ! म्हणून संभागान्तराल एककातून मूळ एककात बदलून घेण्याकरिता खालील सम्बन्धांचा उपयोग करावा.

$\text{ऋ}'_{२}$ (मूळ एककात) = $\text{गा}^{२}\cdot\text{ऋ}'_{२}$ (संभागान्तराल एककात) (१२३)

$\text{ऋ}'_{३}$ (मूळ एककात) = $\text{गा}.^{३}\text{ऋ}'_{३}$ (संभागान्तराल एककात) (१२४)

$\text{ऋ}'_{४}$ (मूळ एककात) = $\text{गा}.^{४}\text{ऋ}'_{४}$ (संभागान्तराल एककात) (१२५)

ज्यात गा = वर्गणाकरिता उपयोगात आणलेल्या संभागान्तरालाचा आकार.

ही परिघात–गणना कशी करतात हे खालील सारणीवरून लक्ष्यात येईल.

सारणी–४३

परिघात गणना

'अत्र' कंपनीने उत्पादिलेल्या ६०० पितळी वॉशर्सच्या जाडीतील विचरणे

इंचात जाडी	वारंवारता	संभागान्तरातील विचरण (स्वेच्छ मूलापासून)		
	च	घं	चघं	च (घं²
·०१८० – ·०१८३	६	–५	–३०	१५०
·०१८४ – ·०१८७९	३०	–४	–१२०	४८०
·०१८८ – ·०१९१९	४२	–३	–१२६	३७८
·०१९२ – ·०१९५९	६६	–२	–१३२	२६४
·०१९६ – ·०१९९९	९४	–१	–९४	९४
·०२०० – ·०२०३९	१२०	०	०	०
·०२०४ – ·०२०७९	१०२	१	१०२	१०२
·०२०८ – ·०२११९	६०	२	१२०	२४०
·०२१२ – ·०२१५९	५४	३	१६२	४८६
·०२१६ – ·०२१९९	१४	४	५६	२२४
·०२२० – ·०२२३९	१२	५	६०	३००
	६००		–२	२७१८

$$ऌ_1 = \frac{\text{यो (चघं)}}{\text{डा}} = \frac{-२}{६००} = -०.००३३०$$

$$ऌ_2 = \frac{\text{यो. च (घं}^2\text{)}}{\text{डा}} = \frac{२७१८}{६००} = ४.५३००$$

$$ऌ_3 = \frac{\text{यो. च (घं}^3\text{)}}{\text{डा}} = \frac{१०}{६००} = ०.०१६७.$$

$$ऌ_4 = \frac{\text{यो. च (घं}^4\text{)}}{\text{डा}} = \frac{३२५०२}{६००} = ५४.१७००.$$

$$ऋ_1 = ०$$

$$ऋ_2 = ऌ_2 - ऌ_1^{2} = ४.५३०० - (०.००३३)^2$$
$$= ४.५२९९९$$

$$ऋ_3 = ऌ_3 - ३ऌ_1 \cdot ऌ_2 + २ऌ_1^{2}$$
$$= ०.०१६७ - ३ (०.००३३) (४.५३००) + २ (०.००३३)^2$$
$$= -०.४३१७७.$$

$$ऋ_4 = ऌ^4 - ४ऌ_1\, ऌ_3 + ६ऌ_1^{2} ऌ_2 - ३ऌ_1^{4}$$
$$= ५४.१७०० - ४ (०.००३३) ०.१६७ + ६ (.००३३)^2 ४.५३०० - ३ (०.००३३)^4$$
$$= ५४.१७००७६$$

$$ऋ'_1 = ०;\; ऋ'_2 = ऋ_2 - \tfrac{१}{१२} = ४.५२९९९ - .०८३३३$$
$$= ४.४४६६६$$

$$ऋ'_3 = ऋ_3 = -०.४३१७७$$

$$ऋ'_4 = ऋ_4 - \tfrac{१}{४} ऋ_4 + \tfrac{७}{२४०}$$
$$= ५४.१७००७६ - २.२६४९९५ + ०.०२९१६७$$
$$= ५१.९४४२९$$

वक्र-प्ररूप निकष

बंटन वर्णनार्थ जे वक्र शक्य आहे त्याचे ऐकात्म्य परिघात-अर्हाद्वारे त्या निकषाने होते. हे निकष खालीलप्रमाणे संगणित करावे.

$$आ_1 = ऋ_3^{2} / ऋ_2^{3}. \qquad (१२६)$$

आणि—

$$आ_२ = \frac{ऋ_४}{ऋ_२^२} = \frac{ऋ_४}{धि_४} \qquad (१२७)$$

व—

$$सि = \frac{आ_१ (आ_२ + ३)^२}{४ (४ आ_२ - ३ आ_१)(२ आ_२ - ३ आ_१ - ६)} \qquad (१२८)$$

बंटन वर्णनार्थ ज्या **पिअर्सन वक्राचे** ऐकात्म्य हवे आहे ते वक्र वरील निकष उपयोगात आणून निश्चित करता येईल.

ककुद्–वक्रता

वारंवारता बंटनातील "शिखर–उंचीस" ककुद्–वक्रता असे म्हणतात. प्रसामान्य वक्रापेक्षाही ककुद्–वक्रता अधिक असल्यास (आ > ३) त्या वक्रास **कूट–ककुद्मी** असे म्हणतात. हा 'आ' जर ३– पेक्षा कमी असेल तर त्या वक्राचे शिखर प्रसामान्य–वक्रापेक्षा अधिक सपाट असते. अशा वक्रास **चिपिट–ककुद्मी** असे म्हणतात.

ककुद्–वक्रतेचा मापांक खालीलप्रमाणे:—

$$आ_२ - ३ \qquad (१२९)$$

(१) येणारा परिणाम शून्य असेल तर वक्रास मध्य–ककुद्मी असे म्हणतात.

(२) येणारा परिणाम अधिक अथवा धन असेल तर वक्रास कूट–ककुद्मी असे म्हणतात.

(३) येणारा परिणाम ऋण असल्यास वक्रास चिपिट–ककुद्मी असे म्हणतात.

सारणी ४३ मधील बंटनाची "आ–अर्हा" अशी :—

$$आ_२ = \frac{५१.९४४२९}{(४.४४६६६)^२} = २.६३$$

म्हणजे (आ $_२$ – ३) ची अर्हा ऋण होय. अर्थात सारणी ४३ प्रमाणे आलेले वक्र चिपिट–ककुद्मी असले पाहिजेत.

विषमतेचे इतर मापांक

बंटनातील विषमतेचा अधिक सुतथ्य निकष खालील रीतीने ठरवावा.

$$अ_३ = \frac{ऋ_३}{धि^३} = \sqrt{आ_१} \qquad (१३०)$$

प्रसामान्य–वक्राकरिता $अ_३$–ची अर्हा शून्य असते.

दुसरे एक सूत्र असेः—

$$क्ष = \frac{आ_१ \; (आ_२ + ३)}{२ \; (५ आ_२ - ६ आ_१ - ९)} \qquad (१३१)$$

ह्या 'क्ष' अर्हेवरून भूयिष्ठ हे अधिक चांगल्या तऱ्हेने निश्चित करता येते.

$$भू = \bar{य} - (क्ष) \; (धि) \qquad (१३२)$$

वरील 'क्ष' व $क्ष^२$– मधील 'क्ष'–हे अगदी भिन्न आहेत.

न्यासाचे संग्रहण

न्यासाचे एकत्रीकरण व संग्रहण

संख्यानीय न्यास हा प्राथमिक, मूळ सामग्रीपासून उपलब्ध होऊ शकतो. मुलाखत, प्रश्नावली अथवा पोस्टाद्वारे केलेली परिपृच्छा ह्या रीती प्राथमिक सामग्रीत मोडतात. द्वितीय सामग्रीपासूनही अशा तऱ्हेचा न्यास गोळा करण्यात येतो. दुसऱ्या एखाद्या व्यक्तीने अथवा इतर शाखांनी गोळा केलेला न्यास आपल्याकरिता निवडून घेणे हे द्वितीय प्रकारच्या सामग्रीत येते.

प्राथमिक सामग्री

मुलाखत–पद्धतीचा उपयोग.

(१) सामग्रीशी प्रत्यक्ष संबंध आल्यामुळे एकत्रित केलेल्या न्यासात परिशुद्धतेचा अंश अधिक असतो.

(२) ह्या पद्धतीमुळे बराचसा असा न्यासही उपलब्ध होतो जो इतर दुसऱ्या प्रश्नावली वगैरेसारख्या पद्धतींनी केव्हाही हस्तगत होणार नाही.

(३) मिळणारी माहिती खरी आहे किंवा खोटी आहे हे तत्काळ जागेवरच प्रत्यक्ष तपासून पाहता येते.

तोटे:

(१) ह्या पद्धतीने फक्त लहान न्यादर्शच हाताळले जाऊ शकतात.

(२) प्रत्यक्ष मुलाखतीत वैयक्तिक मताचा प्रभाव पडण्याची शक्यता जास्त असते.

(३) ही पद्धती सर्वसाधारणतः अधिक कार्यक्षम अशी मानता येणार नाही; कारण त्यात पैशाचा व वेळेचा बराच अपव्यय होतो.

प्रश्नावली पद्धतीची लक्षणे

(१) प्रश्न सहज समजण्यासारखे असावे.

(२) शक्य असल्यास तर्कशुद्धीरीत्या त्यांची मांडणी करावी.

(३) प्रश्नांची उत्तरे संक्षिप्त असावी. साधारणतः हो किंवा नाही; मोकळ्या जागेत 'हो'–ची (√) किंवा 'नाही' ची (×) खूण करणे;अथवा शक्य असल्यास फक्त आकड्याने दर्शन होण्याइतपतच ही उत्तरे सीमित असावी.

(४) प्रश्नावली संक्षिप्त, साधी व थोडक्यात आटोपणारी असावी.

(५) ही प्रश्नावली सोयिस्कर व चटकन उत्तर देता येईल अशी असावी.

(६) प्रश्नावलीची मांडणीही अशी असावी की ज्यामुळे पुढील सारणीयन सहज शक्य होईल.

फायदे :

(१) ह्या पद्धतीने थोड्या वेळातून फार मोठ्या क्षेत्रातील असा न्यास सहज गोळा करता येतो.

(२) असा न्यास गोळा करण्याचा खर्चही तौलनिक दृष्ट्या ह्या पद्धतीत अधिक नसतो.

तोटे :

(१) बऱ्हंशी काही प्रश्नांची उत्तरे पूरक–विवरणाशिवाय देता येणे शक्य नसते.

(२) ह्या पद्धतीने बरेच वेळा येणारे परिणाम हे अगदी बिन–भरवशाचे असतात.

(३) न्यादर्शातील फार मोठ्या विभागातर्फे उत्तरेच न येण्याचा संभव ह्या पद्धतीत बराच असतो.

द्वितीय सामग्री

फायदे :

(१) बहुतेक न्यास संकलित झालेलाच असतो, त्यामुळे वेळ व पैसा या दोन्हींची बचत होते.

(२) न्यासातील परिशुद्धतेची जबाबदारी टाळणे ह्यात सहज शक्य असते.

तोटे :

(१) ह्या सामग्रीतील न्यास आधीच गोळा केलेला असल्याने तो किती अंशाने खरा आहे ह्याचे सत्यापन शक्य नसते.

(२) ज्या वेळेस हा न्यास गोळा केला त्या वेळेस नक्की कोणती संख्यानीय प्रक्रिया उपयोगात आणली होती तिचे ज्ञान नसल्याने न्यासाच्या परिणामाच्या परिशुद्धतेविषयी वर्तमानकाली सत्यापन करणे शक्य नाही.

(३) मूळ सामग्रीतील न्यासाचे संकलन करताना अथवा नंतर आणि त्याचप्रमाणे त्याचे निर्वचनातही जो व्यक्तिगत प्रभाव त्यावर पडला असेल त्याचे परिणाम द्वितीय सामग्रीतही संभवतात.

(४) अभ्यासाच्या हेतुनिष्ठतेप्रमाणे प्रथमार्धातच पूर्वग्रहदूषित दृष्टीने न्यासाचे संकलन व त्यावरील संख्यानीय प्रक्रिया घडली असण्याचा संभव आहे. शक्य आहे की त्यामुळे द्वितीय सामग्रीवरही त्याचा परिणाम होतो.

(५) शक्य आहे की, प्रथम सामग्री संग्रहित करताना प्रातिनिधिकत्वाकडे दुर्लक्ष्य झाले असेल.

प्रकरण १७

संख्यानीय सारणी

इयत्तात्मक न्यासाच्या तुलनेसाठी स्तंभातून व रांगातून केलेल्या व्यवस्थित मांडणीस संख्यानीय सारणी असे म्हणतात.

संख्यानीय सारणीचे कारणपरत्वे दोन प्रकारांत संभाजन होते. सर्वसाधारण कारणासाठी केलेल्या सारणीयनास प्राथमिक सारणी असे म्हणतात. विशिष्ट कारणासाठी स्वीकारलेल्या सारणीयनास व्युत्पादित सारणी असे म्हणतात.

सर्वसाधारण सारणीयन कार्य :

(१) सर्वसाधारण कारणासाठी तयार केलेल्या सारणीचा मूळ हेतु संदर्भात्मक असतो.

(२) मूळ न्यासाची आवश्यकता आहे, अशा ठिकाणी ह्या सारणी मूळ वृत्तान्त पुरविण्याचे कार्य करतात.

(३) विशिष्ट हेतूसाठी तयार होणाऱ्या सारणीच्या रचनेत त्यांचा उपयोग होतो.

लक्षणे :

(१) सर्वसाधारण सारणीवरून एकाच विषयावर विविध तऱ्हेची माहिती मिळू शकते.

(२) अशा सारणीतून निरपेक्ष अंक असावे. प्रतिशतता अंक त्यात नसावे.

(३) अशा सारणीतील एकूण माहिती अशा रीतीने दर्शविलेली असावी की संदर्भ म्हणून ती सहज, केव्हाही उपलब्ध होऊं शकेल.

(४) अशा सारणीतून वास्तविक असे जे अंक असतील तेच द्यावे. गोळाबेरीज म्हणून एकत्र केलेले अंक असू नयेत.

विशिष्ट हेतूसाठी केलेले सारणीयन कार्य :

(१) विशिष्ट हेतूसाठी तयार केलेल्या सारणींचा प्राथमिक उद्देश न्यासातील विशिष्ट संबंधाकडे लक्ष आकृष्ट करणे हा असतो.

(२) सर्वसाधारण सारणीतील साधारण वृत्तातील एक विशिष्ट अशी बाजू विशिष्ट दृष्टिकोनातून जोरदारपणे पुढे मांडणे हा विशिष्ट हेतूसाठी केलेल्या सारणीयनाचा मुख्य हेतु असतो.

(३) निवडक वृत्त, थोडक्यात, सहजपणे दिग्दर्शित करणे, हा विशिष्ट हेतूच्या सारणीचा मुख्य उद्देश असतो.

लक्षणे :

अशा सारणीतून गोळाबेरीज अंक वापरण्यास हरकत नाही.

(२) विशिष्ट हेतूच्या सारणीत निर्वचनार्थ निवडलेले वृत्त लहान अवकाशात पण स्पष्टपणे दार्शित करता येते.

सारणी–४४

शीर्षक : संयुक्त संस्थानांतील अशोधित लोखंडाचे उत्पादन व त्याच्या किंमती.

१९१९–१९३०

पेटी–वृत्त वर्ष	उत्पादन एक (हजार टनांत)	किंमत * स्तंभ–वृत्त (डॉलरमध्ये खास)
१९१९	३१,०१५	२८·९७
१९२०	३६,९२६	४२·७६
१९२१	१६,६८८	२२·५८
१९२२	२७,२२०	२४·०६
१९२३	४०,३६१	२६·३०
बुंधा १९२४	३१,४०६	२०·९०
१९२५	३६,७००	२०·५८
१९२६	३९,३७८	२०·४२
१९२७	३६,५६६	१८·५५
१९२८	३८,१५६	१७·६८
१९२९	४२,६१४	१८·४३
१९३०	३१,३९९	१७·७३

* साताहिक–माध्य किंमती भट्टीवरील–पादवृत्त.

चिकागो व बर्मिंगहॅम येथील. आधार मूळ : लोहयुग.

सारणीयनाचे नियम :

संख्यानीय सारणीयनाचे सर्वसंमत साधारण असे नियम खाली दिले आहेत.

(१) **शीर्षक :** हे सारणीचे शीर्षक पूर्ण विवरणात्मक असावे. सारणीत काय असेल ह्याचा संपूर्ण बोध शीर्षक वाचूनच झाला पाहिजे.

खालील गोष्टींचाही शीर्षक वाचून उलगडा व्हावा.

(अ) दर्शित न्यासाचे स्वरूपही त्यावरून उघड व्हावे.

(ब) कोणत्या प्रदेशास सारणीतील न्यास लागू होतो हेही त्यावरून कळावे.

(क) कोणत्या कालखंडापुरता सदर न्यास सीमित आहे, ह्याचाही बोध शीर्षकाद्वारे व्हावा.

सारणीच्या सुरुवातीस अगदी मध्यभागी पण वर असे हे शीर्षक असावे. शीर्षकाचे अक्षर हे साधारणतः सारणीतील अक्षर–अंकापेक्षा जाडसर व ठळक असे असावे.

(२) **उगम :** सारणीचा उगम अथवा तिचे मूळ कशात आहे हे दर्शविणे नेहमी हितावह असते. सारणीतील न्यास स्वतःच मिळविला असल्यास अथवा असा न्यास व्युत्पादित असल्यास मात्र ह्याची विशेष आवश्यकता नाही.

सारणीचा उगम कशात आहे, हे नमूद केल्याने;

(अ) सारणीतील सदर न्यासाची जबाबदारी कशात आहे हे स्पष्ट होते.

(ब) सारणीतील अंक एखाद्यास तपासून हवे असल्यास ते शक्य होते.

(क) अधिक असा न्यास आणखी हवा असल्यास आधाराकडे संदर्भार्थ वळता येते.

आधार (उगम) हा सारणीच्या शेवटी अखेरीस सारणीच्या खाली पण डावीकडे टाकावा.

(३) **पादवृत्त :**

सारणीतील पादवृत्ताचा उपयोग त्या सारणीत वापरलेल्या अंकाविषयी अधिक अशी माहिती देणे असा असतो. सारणीच्या शेवटी ती संपताच, पण आधाराच्या अगोदर हे पादवृत्त घालावे. सारणीत एखादे पादवृत्त आहे हे दाखविण्याकरिता संक्षिप्त चिन्हे (अशी * + वगैरे) वापरावी. त्याकरिता अक्षरेही वापरल्यास चालतील. परन्तु अंकाचा उपयोग मात्र करू नये; कारण चुकून सदर अंक सारणीचाच भाग आहे अशी समजूत झाल्यास घोटाळा होण्याचा बराच संभव असतो.

(४) **न्यासाची मांडणी :** सारणीतील पदे काळजीपूर्वक व्यवस्थित मांडल्यास सारणीचे वाचन सुलभ होते. न्यासाचे विश्लेषण व तुलनेस त्यामुळे बरीच मदत होते. विशिष्ट वर्गाच्या न्यासाचे महत्त्वही त्यामुळे स्पष्ट होते. सारणी-तील पदे खालील रीतीने मांडता येतात.

(अ) **वर्णानुक्रमाने :** पदांच्या वर्णाच्या अनुक्रमाने सारणीची मांडणी शक्य आहे. सर्वसाधारण सारणीयन ह्याच रीतीने बव्हंशी करण्यांत येते.

(ब) **कालक्रमानुसार :** एका कालखंडातील विषयांच्या तुलनेसाठी त्यांची मांडणी त्या विषयांच्या वृत्तान्तानुसार करावी. हा कालक्रम साधारणतः गतकालापासून अर्वाचीन कालापर्यंत बुंध्याच्यावरून सुरुवात करून खालपर्यंत, अथवा पेटीवृत्तात डावीकडून उजवीकडे, अशा पद्धतीने मांडावा.

(क) **भौगोलिक दृष्ट्या :** साधारणतः स्थानपरत्वे विषयाची मांडणी केल्यासही ती माहिती उपयुक्त असते. देश, प्रांत अथवा जिल्हानिहाय, किंवा शहर–गावानुसार हे सारणीयन असल्यास उत्तम ! सर्वसाधारण सारणीयनात अशा तऱ्हेची पद्धती साधारणतः संदर्भात अवलंबिली जाते.

(ड) **महत्तनुसार :** सारणीतील मांडणी आकारमानानुसारही करण्यात येते. सर्वात मोठा अंक सारणीच्या ऊर्ध्वभागी स्तंभांत प्रथन असतो. मग इतर अंक त्यांच्या महत्तेप्रमाणे एकाखाली एक द्यावे. रांगाचे वृत्त हे त्यांच्या किंमती-प्रमाणे असते. रांगातील हे वृत्त संख्यात्मक असल्यास (वारंवारता बंटनाच्या संभा-गान्तरालात असते तशी) त्याची मांडणीही महत्तेप्रमाणे असावी. अशा वेळेस ओळ अथवा रांग करताना लहान महत्तेपासून सुरुवात करून शेवटी–तळाशी–मोठ्यात मोठे पद असावे. स्तंभांच्या दृष्टीने विचार करिता सर्वात लहान पद डावी-कडे व मग अनुक्रमे उजवीकडे मोठी पदे अशी मांडणी असावी.

(फ) **सांप्रदायिक संभाजन :** काही काही बाबतीत सारणीयनाची पद्धती ही नियम म्हणूनच ठरलेली असते. त्यात कोणत्याहि तऱ्हेचा बदल संभवत नाही. उदाहरणार्थ : "पुरुष, स्त्री, मुले" हा लिहिण्याचा ठराविक असा क्रम सारणीतून अवलंबिण्यात येतो. सदर क्रम कधीच "मुले, स्त्री, पुरुष" असा उलट तऱ्हेने लिहू नये.

ह्या पद्धतीस सांप्रदायिक–मांडणी पद्धती असे म्हणतात.

(५) **स्तंभ :** सारणीतून जेव्हा अधिक स्तंभ असतील तेव्हा त्यास संदर्भा-करिता अनुक्रमांक अथवा अक्षरे द्यावी.

(६) **स्तंभाचे मथळे (वृत्त)** प्रत्येक स्तंभाच्या शीर्षकास 'स्तंभ–वृत्त' असे म्हणतात. सदर वृत्त संक्षिप्त असावे. सारणीच्या उजव्या टोकास एक संकीर्ण स्तंभ ठेवावा.

(७) **बुंधा :** रांगेच्या शीर्षकास ओळवृत्त असे म्हणतात.

सारणीच्या ज्या भागात हे ओळवृत्त असते, त्या विभागास बुंधा (Stub) असे म्हणतात. बुंध्यातील पदे नेहमी वर्गीत असल्यास न्यासाच्या निर्वचनास त्यामुळे मदतच होते. उदाहरणार्थ : १२ महिने हे ३ महिन्यांच्या एकाएका 'क्वार्टरमध्ये' विभाजित करून लिहिताना दोन क्वार्टरमध्ये जागा अथवा अवकाश सोडावा.

(८) **योग :** स्तंभाचा योग हा त्या स्तंभाच्या शेवटी व खालच्या अंगास लिहावा. ओळींचा योग हा उजव्या अंगास चरमसीमेवर लिहावा.

(९) **मापांकाचे एकक :** ह्याची माहिती पेटी–वृत्तात स्तंभाच्या मथळ्याखाली असावी.

(१०) **आखणी :** सारणीतील ओळींची आखणी खालीलप्रमाणे करतात. (अ) शीर्षकाखाली एक अनुप्रस्थ–रेषा ओढावी. त्याचप्रमाणे सारणी संपल्यावरही एक अनुप्रस्थ-रेषा काढावी. (ब) स्तंभ हे एकमेकांपासून एक-रेषेने विभक्त करावे. सारणीतील द्रव्य टाईप केलेले असेल तर अशा रेषेची आवश्यकता नसते; पण असल्यास उत्तम ! (क) पेटी-वृत्त व बुंधा ही एकमेकांपासून दोन अथवा जाडसर रेषेने वेगळी करावी. (ड) स्तंभातील योग-अंक व इतर-अंक हे एकमेकांपासून एक रेषेने अलग करून दाखवावे.

(११) **महत्त्व :** सारणीतील महत्त्वाच्या अंकाचे वृत्त-दर्शन दोन-रेषा, जाडसर रेषा इटालिक अथवा हलक्या व भरीव टाइपांचा उपयोग करून विशद करावे.

चित्रांकण

इयत्तात्मक न्यासाच्या दृक् विवरणासाठी ज्या पद्धतींचा उपयोग होतो त्यास चित्रांकण असे म्हणतात.

चित्रांकणाचे अनेक प्रकार आहेत. न्यासाचे स्वरूप व कारण ह्यांच्या अनुरोधाने कोणते चित्रांकण वापरावे त्याची निश्चिती करावी.

(१) रेखीय आणि वक्र चित्रांकण :

(अ) गणितीय प्रांकण.
(ब) अर्ध–छेदा अथवा छेदा प्रांकण.
(क) विशिष्ट प्रकारचे प्रांकण.
विशिष्ट प्रकारचे रेखीय प्रांकण.
(य) एकरंगी कागदाचे कापलेले आकृती–चित्र.
(र) पट्टी–चित्र.
(ल) उंच–सखल चित्र.
(व) आयत–चित्र.

(२) दंड–चित्र.
(३) क्षेत्रफळ–चित्र.
(४) घनफळ–चित्र. (घनचित्रे)
(५) संख्यानीय नकाशे.

चित्रांकणाचे नियम :

(१) प्रत्येक चित्रास संक्षिप्त पण परिशुद्ध असा मथळा असावा. चित्राच्या वर, मधल्या जागी, हा मथळा असावा. अशा मथळ्यामुळे खालील गोष्टींचे स्पष्टीकरण व विवरण होते.

(अ) न्यासाचे स्वरूप.
(ब) भौगोलिक परिस्थिती.
(क) काल–खण्ड.

ही तीन्ही तत्त्वे दिलेल्या क्रमानुसार मथळ्यात ग्रथित असतात.

(२) याम–रेषा ह्या बारीक व आवश्यक तेवढ्याच असाव्या. वक्र–रेषा जाडसर असाव्या. जाडीमुळे त्या उठून दिसतात.

(३) न्यासाचे मूळ चित्रांकणाच्या शेवटी डाव्या हातास असावे.

तळटीपा असल्यास, चित्रांकणाच्या खाली उजव्या हातास त्या असाव्या.

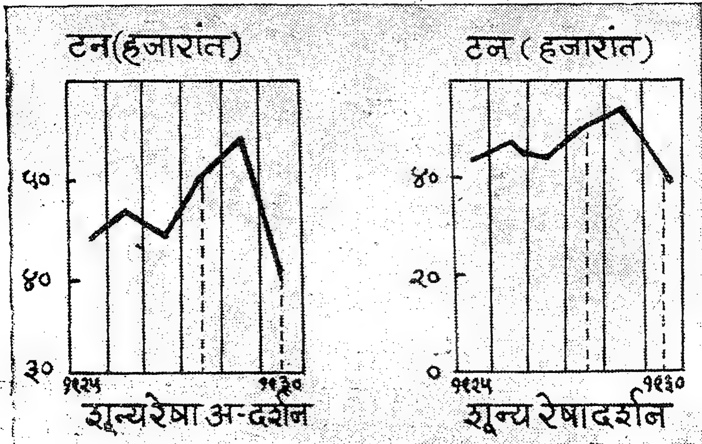
(५) वक्र-रेषा, वर्तुळ-खंड व इतर तपशील शक्यतोवर चित्रात जितके कमी असतील, तेवढे बरे; कारण त्यामुळे चित्रांचे आकलन सहजी होऊन चटकन ते लक्ष्यात भरते.

(६) प्रत्येक **पट्टीवर** त्याचा **मथळा** व त्याकरिता उपयोगात आणलेले एकक द्यावे.

(अ) य-यामरेषेचा मथळा त्या रेषेच्या मध्यभागी असावा.

(ब) र-यामरेषेचा मथळा त्या रेषेच्या वर-डोक्यावर-असावा.

(७) र-पट्टीवरील **शून्य बिन्दूची** सुरुवात नेहमी चित्रात दाखवावी. नाहीतर तुलनेत घोटाळा होतो. आकृती २९ मधील दोन शिखरे

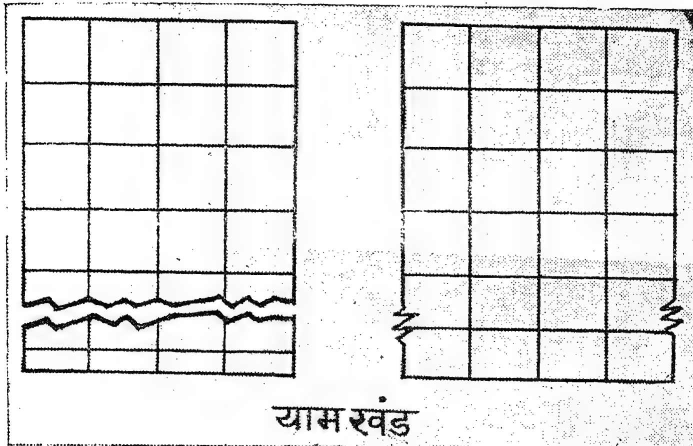


आकृती २९

१९२६—३१ मधील पोलादाचे उत्पादन

तौलनिक दृष्ट्या तपासून पाहिल्यास शून्य बिन्दूची आवश्यकता पटेल. त्या आकृतीतील १९२८ व १९३० मधील पोलाद उत्पादनांकाची स्थिती दर्शविणाऱ्या बिन्दूच्या उंचीची निष्पत्ती चित्र २ मध्ये ५ : ४ अशी आहे, तर चित्र १ मध्ये तीच निष्पत्ती २ : १ अशी आहे.

यदाकदाचित जागा अपुरी असेल तर र–पट्टीवर **यामखंड** वापरून गाळलेला शून्य–बिन्दू दाखविता येतो. आकृती ३० मध्ये अशा प्रकारचे दोन यामखंड दिले आहेत.



आकृती ३०

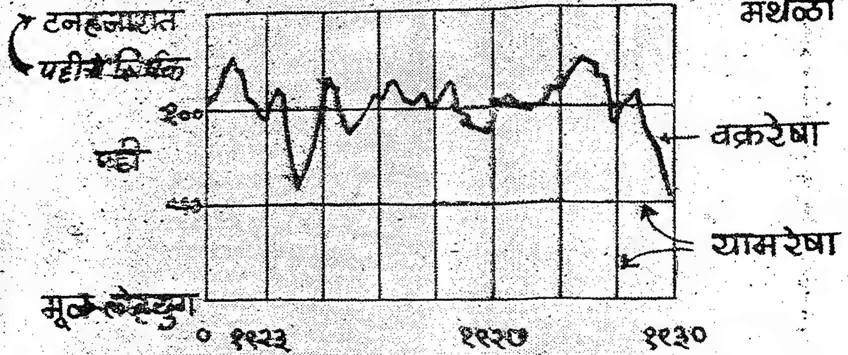
(८) 'य'–व 'र'– अक्षावर मापांक पट्टी द्यावी. त्यामुळे चित्रातील विचरणाच्या आकारमानाची स्पष्ट कल्पना येते.

(अर्थात, अति–सूक्ष्म असे फरक ह्या पट्टीवरून वाचणे शक्य नाही. त्याचप्रमाणे, कोणत्याही स्थानाच्या वास्तविक–अर्हाही ह्या पट्टीवरून कळणार नाहीत. त्याकरिता मूळ न्यासच धुंडाळावयास हवा.)

(९) य–अक्षावरील अवकाश कालान्तर दर्शवीत असल्यास प्रत्येक आवर्तनकालाचा बिन्दू त्या अन्तरालाच्या मध्यभागी दाखवावा. वाटल्यास सदर आवर्तनकाल याम–रेषेशी जुळता ठेवून त्याचे बिन्दू त्या अक्षावरील रेषेवर प्रांकित करावे.

(१०) र–अक्षावरील पट्टी शून्यापासून वर अधिक अर्हेप्रत खालून वर अशी न्यावी. य–अक्षावरील शून्य ते अधिक अर्हा डावीकडून उजवीकडे अशी वाढवीत न्यावी.

चित्राचे हे विशेष आकृती ३१ मध्ये दाखविले आहेत.



आकृती २१

१. रेषा आणि वक्र–चित्र :

इयत्तात्मक न्यासातील बदल रेषेने अथवा वक्राने दर्शविल्यास येणाऱ्या चित्रास रेषाचित्र अथवा वक्र–चित्र असे म्हणतात.

अशा प्रकारचे चित्र बिन्दूचे मिळून तयार होते. सदर बिन्दूची स्थाने 'य' व 'र'–अक्षावर त्यांच्या किंमतीप्रमाणे निश्चित केली जातात. हे सर्व बिन्दू मग सरळ रेषेने जोडावे.

अशा तऱ्हेची रेषा–चित्रे ही त्या चित्राकरिता वापरलेल्या पट्टीप्रमाणे विभक्त होतात. (अ) गणितीय पट्टी. (ब) छेदा–पट्टी. (क) इतर.

गणितीय पट्टी :

गणितीय पट्टीप्रमाणे आखलेल्या कागदावरील याम–रेषेचे अन्तर सर्वत्र सारखे असते. त्यामुळे सारख्या राशी अथवा मात्रांतील अन्तरही सारखेच असते. एक व तीन मधील अन्तर गणितीय पट्टीवर जेवढे असेल तेवढेच अन्तर आठ व दहामध्ये असते.

गणितीय कागदावर गणितीय श्रेढीचे प्रांकण केल्यास येणारे चित्र हे सरळ-

असते. कारण गणितीय–श्रेढी–अर्हा ह्या समान्तर व अचल अन्तराच्या त. त्याचप्रमाणे समान राशी ह्या समान अन्तराने दर्शित होतात व समान ने निरपेक्ष अशी सम अन्तरे दर्शवितात.

सरल–रेखीय अथवा वक्र–चित्र हे चित्रांकणाचे नेहमी उपयोगात येणारे ान्य चित्र–प्रकार होत.

छेदा अथवा अर्ध–छेदा प्रांकण :

निरपेक्ष परिवर्तनाऐवजी प्रतिशतता परिवर्तने प्रांकित करावयाची असल्यास ता एक निराळीच पट्टी उपयोगात आणतात.

दोन युग्म अंकांतील अचल असे प्रातिशतता बदल दाखवावयाचे असल्यास अंकाच्या छेदाने दाखवावे. असे केल्यास त्या छेदातील फरक सर्वत्र सारखा .

अंक	छेदा	
२	०·३०१०३	
४	०·६०२०६	
फरक	०·३०१०३	१०० % वाढ.

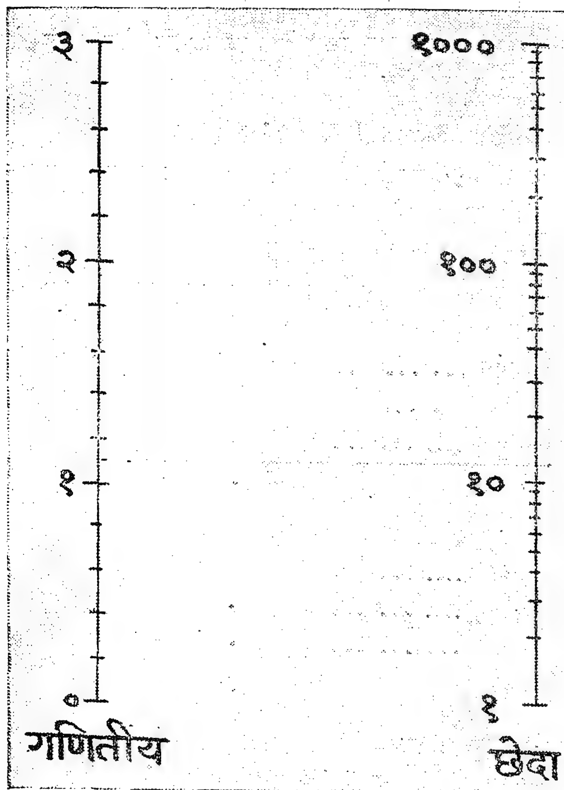
अंक	छेदा	
५	०·६९८९७	
१०	१·०००००	
फरक	०·३०१०३	१०० % वाढ

म्हणजेच मूळ अंकाऐवजी त्यांचे छेदा प्रांकित केल्यास त्यांतील अचल प्रतिशतता बदल हे समान अन्तराने (वर्धन अथवा अपवर्धन) दर्शित त.

मूळ न्यासाचे छेदात रूपांतर करून मग तो प्रांकित करण्यात वेळेचा व वा बराचसा अपव्यय होतो. त्याकरिता एका विशिष्ट पट्टीवरून मूळ अंक छेदात रूपान्तरित करून प्रांकित करणे हिताचे असते. हे छेदा बहुशः गाणि-पट्टीत नेहमीच्या पद्धतीप्रमाणे प्रांकित करतात.

उदाहरणार्थ, दोन ह्या अंकाचा छेदा अगोदर छेदा–सारणीवरून काढावा. देल्याप्रमाणे ही अर्हा ०·३०१०३ आहे. ही अर्हा मग ग्राफ कागदावर त करावी. परन्तु जर अगोदरच अशी एखादी पट्टी तयार केलेली असेल की दोनाची छेदा–अर्हा ०·३०१०३ ने दाखविलेली असेल तर मग सदर दोन अंकाचे अनुक्रम असे छेदा न काढताच एकदम ग्राफवर प्रांकित करता येतील.

गणितीय पट्टी व त्यास अनुक्रामिक अशी छेदा–पट्टी ह्यांतील परस्पर संबंध आकृती ३२ मध्ये दिला आहे.



आकृती ३२

'य' व 'र' ह्या दोन्ही अक्षांवरील प्रांकण छेदा–पट्टीत असेल तर त्यास छेदा–प्रांकण असे म्हणतात. फक्त एकाच अक्षावर छेदा–प्रांकण असेल तर त्यास अर्ध–छेदा–प्रांकण असे म्हणतात.

य–अक्षावर काल दर्शविला जातो. म्हणून अर्ध–छेदा कागदातील य–अक्षावर गणितीय पट्टीचे प्रांकण असते. र–अक्षावर मात्र छेदा–पट्टीचे प्रांकण असते.

छेदा–चित्राची लक्षणे :

(१) अशा चित्रांतून शून्याची अथवा आधार–रेषा नसते.

(२) अर्ध—छेदा चित्रांतील अनुप्रस्थ अक्ष हा गणितीय पट्टीत असतो व कोटि-अक्ष हा छेदा-पट्टीत असतो. छेदा-चित्रातील दोन्ही अक्ष छेदा-पट्टीतच असतात.

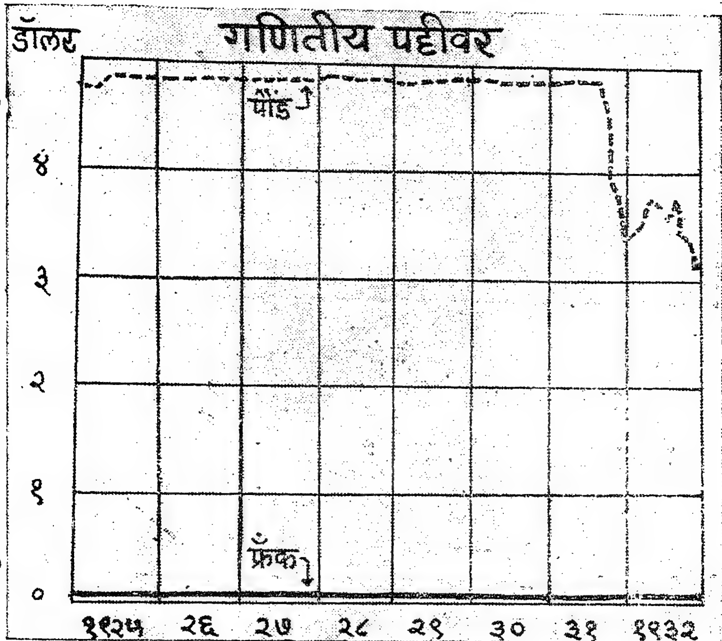
(३) छेदा—कागदावर गुणोत्तर-श्रेढीचे प्रांकण सरलरेखीय येते. कारण गुणोत्तर श्रेढीचे छेदा हे गणितीय श्रेढी प्रमाणात असतात.

(४) सारख्या महत्त्वेचे वर्धन अथवा अपवर्धन हे छेदा कागदावर समान प्रतिशतता बदल दर्शवितात.

(५) छेदा—चित्रातील समान उतार हे समान बदल दर्शवितात.

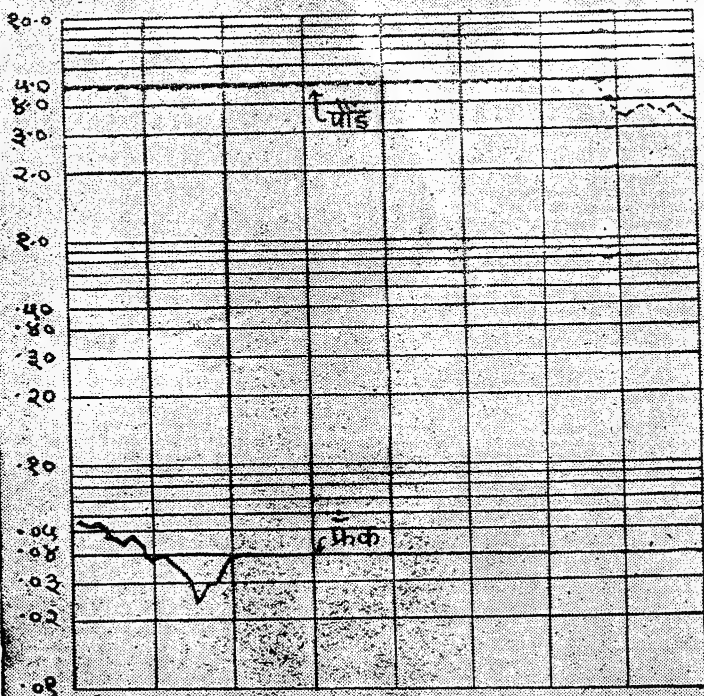
(अ) असले छेदा प्रांकण (अ) अनुपाती परिवर्तनातील हे अर्घांची तुलना करण्याकरिता उपयोगात आणतात. (ब) दोन अथवा आधिक श्रेणी ज्यांच्या राशीत अतिशय फरक आहे अशातील संबंध दाखविण्याकरिता छेदा—प्रांकणाचा उपयोग करतात.

(क) अशा संबंध—दर्शनासाठी गणितीय पट्टीपेक्षा छेदा—पट्टी अधिक उपयुक्त का असते हे आकृती ३३ व ३४ च्या तुलनेवरून कळून येईल.



आकृती ३३

१९२५–३२ मधील पौंड व फ्रँकांतील "एक्सचेंज रेट"



आकृती ३४

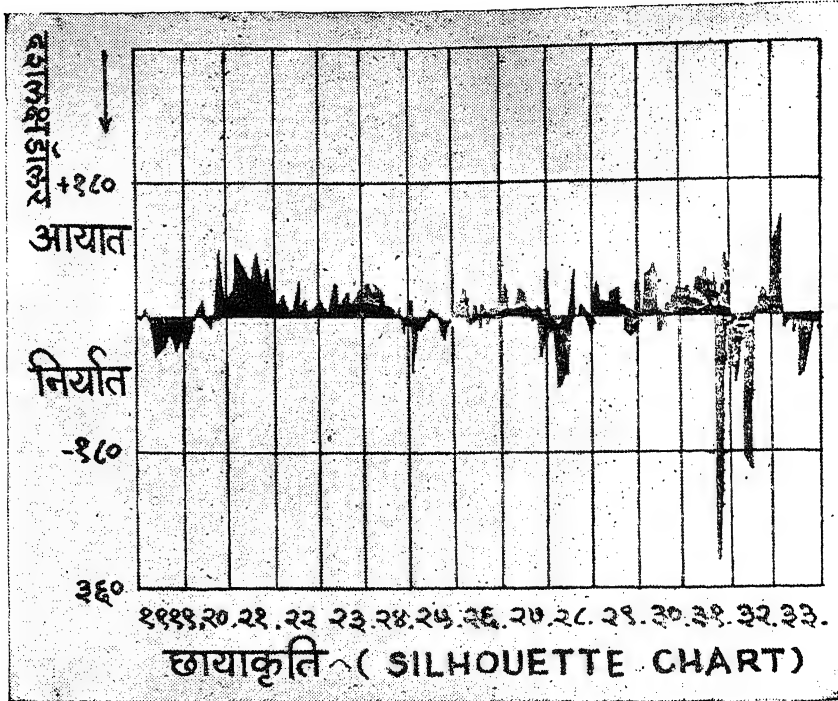
१९२५–३२मधील पौंड व फ्रँकांतील विनिमयाचा दर.

विशेष प्रकारचीं रेखीय चित्रे :

१. सिलहौट चित्र (Silhoutte Charts).

शून्य अथवा आधार–रेषेपासून असणारी धन व ऋण विचलने दर्शविणारे रेखीय चित्रास सिलहौट–चित्र म्हणतात. अशा चित्रातील आधार–रेषा व वक्रातील क्षेत्र मग काळ्या रंगाने भरून काढावे. (आकृति ३५)

आधार–रेषेपासून होणारी विचलने दर्शविणाऱ्या बिन्दूंचे प्रथम प्रांकण द्यावे. हे बिन्दू मग सांधावे. सरतेशेवटी आधार–रेषा व बिन्दू यामुळे तयार होणाऱ्या वक्रातील क्षेत्र काळ्या रंगाने भरावे.



आकृती ३५

१९१९-३३ दरम्यान संयुक्त संस्थानांतील सोन्याची हालचाल.

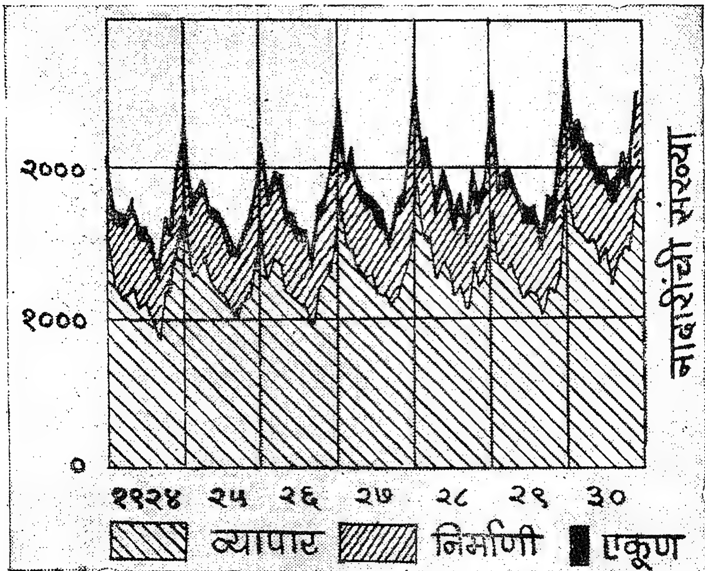
२. **पट्टी-चित्र :** हे सुद्धा एक प्रकारचे रेषा-चित्रच होय. न्यासातील एकूण विचरणे व त्याच्या विभागातील विचरणे उभ्या व आडव्या पट्टीवर दर्शविणाऱ्या चित्रास पट्टी-चित्र (Band Chart) असे म्हणतात.

हे चित्र तयार करताना प्रथम सर्वांत मोठ्या विभागातील विचरणे प्रांकित करावी व हा भाग मग रंगवून घ्यावा अथवा Cross hatch करावा. त्यानंतर ह्या विभागास दुसरा विभाग जोडावा व वरीलप्रमाणे प्रांकित करून रंगवावा अथवा रेषा माराव्या. अशा तऱ्हेने एकूणातील राहिलेले विभाग जोडून चित्र पूर्ण करावे. सर्वांत वरच्या रेषेतील विचरणे ही मग एकूणातील जी विचरणे आहेत ती दर्शवितात. इतर विभागांच्या रुंदीतील विचरणे ही त्या त्या भागांतील विचरणांचे दर्शक होत. आकृती ३६ हे अशा तऱ्हेचे पट्टी-चित्र होय.

(३) रेषा–चित्राचा आणखी एक असलाच दुसरा नमुना म्हणजे ' **उंच-सखल** ' चित्राचा होय. कालखण्डातील परिवर्तनांचे चित्रण अशा रेषाचित्रांतून होते. शिवाय ह्या मोठ्या कालखंडाचे जे लहान विभाग–आठवडा, महिना वगैरे त्यातील विचलनेही अशा चित्रांतून दाखविता येतात. ह्या विचलनांच्या लहान–मोठ्या अर्हांही त्यातून परिणामकारकपणे प्रांकित होऊ शकतात.

कोणत्याही एका कालखंडाची सर्वांत लहान अर्हा आधी प्रांकित करून मग त्याची सर्वांत मोटी अर्हा प्रांकित करावी. अशा तऱ्हेने एकूण कालखंड संपेपर्यंतचे प्रांकण पूर्ण करावे. त्यानंतर उंचीवरचा बिन्दू व त्याचाच अनुक्रम असा खालचा बिन्दू जाडसर रेषेने सांधावा. अशा प्रकारे तयार होणाऱ्या ह्या रेषांतील अन्तर भरगच्च असल्याने एखाद्या अनियमित पट्टीप्रमाणे हे चित्र दिसते.

(४) **आयत–चित्र :** ह्या चित्रास आयताकार वारंवारता–बहुभुज–चित्र असेही म्हणतात. हे चित्र वारंवारता बंटनावरून तयार करतात. आयताची रुंदी संभागन्तरालाच्या आकाराएवढी धरावी. आयताची उंची त्या संभागातील वारंवारतेइतकी असावी. प्रत्येक संभागाकरिता अशा तऱ्हेने एक आयत ह्या प्रमाणात सदर चित्र पूर्ण करावे.



आकृती ३६

१९२४ ते ३० दरम्यान संयुक्त संस्थानांतील उदिमांतील नादारी.

दण्ड–चित्र :

ह्या चित्रात निरनिराळ्या लांबीचे (परन्तु समान रुंदीचे) असे दण्ड असतात. दण्डाची लांबी ही प्रत्येक विभागातील राशीप्रमाणात असते.

ही दण्ड–चित्रे खालील चार प्रकारात विभक्त होतात.

१. निरपेक्ष, (अ) साधी, (ब) भंजित.

२. प्रतिशत, (अ) साधी, (ब) भंजित.

साधी निरपेक्ष दण्ड–चित्रे :

एकात्र आधार–रेषेवर समान–रुंदीचे असे आयताकार दण्ड उभारावे. दण्डाची उंची ही निरपेक्ष न्यासाच्या प्रमाणात असावी. हे दण्ड अनुप्रस्थ अथवा उदग्र–रेषेत असू शकतात. कालाचे प्रांकण असेल तेथे मात्र उदग्र–रेषेतील दण्ड-चित्र रेखाटण्याचा प्रघात आहे. (आकृती ३७–अ)

भंजित निरपेक्ष दण्ड–चित्रे :

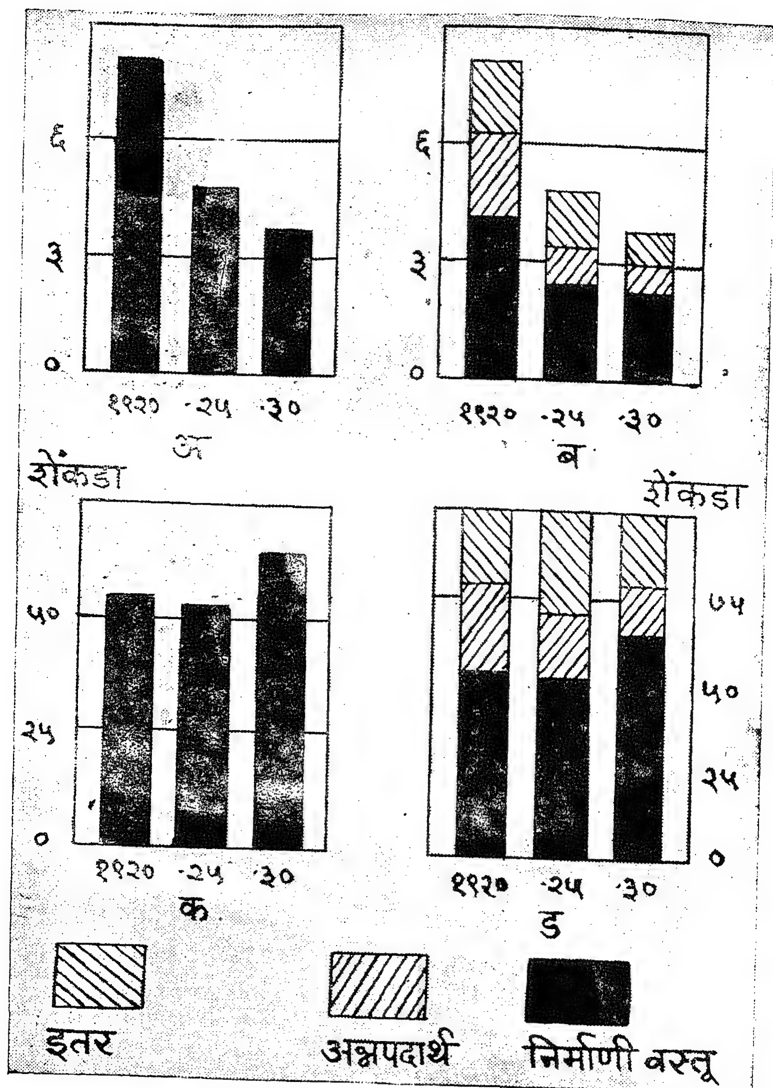
अशा चित्रांतील दण्डाचे प्रत्येक विभागाच्या राशीप्रमाणांत विभाजन केलेले असते. दण्डाचे विभाग हे सारख्या क्रमाने रचलेले असतात. सर्वात मोठा विभाग हा आधार–रेषेपासून सुरू होतो. अर्थात् ह्या निरपेक्ष अंकाचा विस्तार बदलता असल्यास सर्वात मोठा विभागही आधार म्हणून राहणे शक्य नसते. तरीपण प्रांकणाचा क्रम मात्र एकच ठरीव असाच असावा. अशा तऱ्हेचे भंजित चित्र हे संचयी–चित्र असते. कारण त्यांतील निरनिराळ्या विभागांची बेरीज ही एकूणाच्या बरोबर असते. (आकृती ३७ ब)

साधी प्रतिशतता दण्ड–चित्रे :

हे दण्डचित्रही वरीलप्रमाणेच तयार होते. निरपेक्ष अंकाऐवजी त्याच्या प्रतिशत अर्हा फक्त उपयोगात आणतात. प्रत्येक दन्डाची लांबी ही एकूणाच्या विभागीय प्रतिशततेइतकी असते. (आकृती ३७ क)

भंजित प्रतिशतता दण्ड–चित्र :

एकाच आधारावर समान रुंदीचे व लांबीचे दण्ड उभारावे. त्या दण्डाची उंची ही शंभर प्रतिशत मानून त्याचे मग एकूणाचे जे विभाग असतात त्या प्रमाणात ही उंची विभाजित करावी. सर्वात मोठा विभाग खाली आधाराला घेऊन त्यावर इतर विभाग ह्याप्रमाणे चित्र पूर्ण करावे. (आकृती ३७ ड)



आकृती ३७

१९२०–२५ व ३० मधील संयुक्त संस्थानांतील निर्गत.

ह्या भंजित दण्डचित्राचा एक विशेष प्रकार म्हणजे ज्यात फक्त एकच दण्ड असतो असा होय. एका विशिष्ट विभागावरच जेव्हा लक्ष्य केन्द्रित करावयाचे असते तेव्हा अशा चित्रातून एक दण्ड उपयोगात आणतात. दण्डाची एकूण लांबी ही १०० प्रतिशत मानावी. ही लांबी मग एकूणातील विभागांच्या प्रमाणात डावी-कडून उजवीकडे अशा रीतीने विभाजित करावी.

चित्रमय दण्ड–चित्रे :

निरनिराळ्या तऱ्हेची सांकेतिक पण सर्वमान्य ठराविक अशी चित्रेसुद्धा राशितुलनेसाठी उपयोगात आणतात. अशा वेळेस त्या चित्रांच्या उंचीवरून एकूणा-तील निरनिराळ्या विभागांची तुलना करावी.

निरनिराळ्या काळी हिंदुस्थानजवळ असलेल्या गंगाजळीची तुलना हवी असल्यास निरनिराळ्या उंचीच्या रुपयांच्या गंजीने अथवा राशीने हे शक्य आहे. अशा चित्रांतून रुपयांच्या चव्वडची उंची ही त्या काळातील देशातील गंगा-जळीची किंमत दर्शविते.

नफा–नुकसानदर्शक दण्ड–चित्र :

अशा चित्राकरिता सर्वप्रथम आधार म्हणून एक शून्याची रेषा धरावी. ही आधाररेषा अनुप्रस्थ असेल तर आधाररेषेच्या डावीकडील दण्ड नुकसान दर्शवितो; व उजवीकडील दण्डनफा दर्शवितो असे समजावे. उदग्र–रेषेत दण्ड–चित्र काढल्यास आधाररेषेच्या वरील दण्ड नफा–दर्शक समजावे. तर आधार–रेषेच्या खालचा दण्ड नुकसान–दर्शक समजावा.

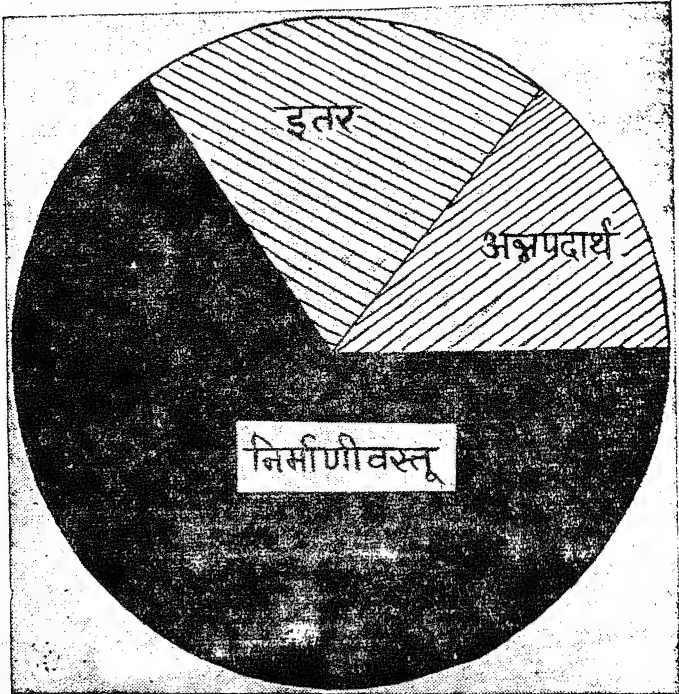
क्षेत्रफळ चित्रे :

अशा चित्रातून राशीची तुलना ही क्षेत्रफळाच्या बदलत्या प्रमाणानुसार करण्यात येते. क्षेत्रफळ–चित्रे ही निरनिराळ्या प्रकारची असू शकतात. उदाहरणार्थ ज्यात समायत, वर्तुळ अथवा काही वेळेस घनाकार आकृतींचा उपयोग आहे अशी चित्रे. क्षेत्रफळ–चित्रांचे पुन्हा दोन गट पडतात. एक, ती चित्रे ज्यांत संपू-र्णांची तुलना त्याच्या विभागाशी करितात. अशा चित्रांतून निरनिराळ्या राशि–पदांची तुलना अनुपाती अशा समायत, वर्तुळ अथवा घनाकार आकृतीवरून करतात. दुसऱ्या तऱ्हेची चित्रे म्हणजे ज्यात एकाच संपूर्णाच्या निरनिराळ्या विभागांची तुलना असते. अशा वेळेस त्या एका क्षेत्राची विभागणी संपूर्णाच्या निरनिराळ्या प्रमाणांत करावी.

वर्तुळ-चित्र :

क्षेत्रफळ चित्रांपैकी विशेष उपयुक्त व नेहमीच्या वापरातले असे चित्र म्हणजे वर्तुळ-चित्र होय.

एक वर्तुळ काढून ते आवश्यक अशा निरनिराळ्या विभागांत विभाजित केल्यास हे चित्र तयार होते. अशा चित्रातील निरनिराळे भाग हे एकूणाचे जे विभाग असतात ते दर्शवितात.



आकृती ३८ : १९३० मधील संयुक्त संस्थानची निर्गत: आर्थिक विभाजनानुसार.

रचना :

(१) वर्तुळ म्हणजे १०० प्रतिशत समजावे.

(२) प्रत्येक वर्तुळ ३६० अंशांत विभाजित करावे.

(३) म्हणून प्रत्येक प्रतिशत $= \frac{३६०}{१००}$

म्हणजे : ३·६° अंश होय.

लक्षणे :

(१) वर्तुळातील खण्डांची रचना ही सामान्यतः न्यासातील विभागांच्या आकारमानाप्रमाणे व घड्याळातील काटा फिरतो त्याप्रमाणे असावी.

(२) तुलनेसाठी वर्तुळ-खण्डांची रचना ही एकरूप असावी.

(३) शक्यतोवर प्रतिशत-प्रमाणाचे अंक व सूचक शब्द हे वर्तुळ खण्डास अनुप्रस्थ असे लिहावे.

(४) रंगकाम, निरनिराळ्या रेषांचा उपयोग अथवा प्रकाश-छायेचा उपयोग केला गेल्यास चित्राखाली त्याची सूची द्यावी.

(५) अशा वर्तुळ-चित्रांची परिणामकारकता रंगकाम, निरनिराळ्या प्रकारच्या रेषांचा उपयोग ह्यामुळे अधिक उठून दिसते.

(६) अगदी कमीत कमी असे वर्तुळ-खण्ड अशा चित्रातून असावे.

(७) वर्तुळ-चित्रातून परिशुद्धतेचे प्रमाण मात्र कमी असते.

(८) अशा वर्तुळ-चित्रातून प्रातिशत प्रमाण न वापरल्यास निव्वळ दृष्टीने निरनिराळ्या विभागांची कल्पना करणे शक्यच नसते.

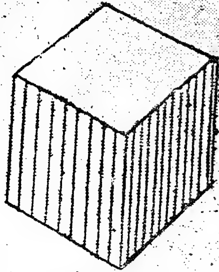
घनाकार चित्रे

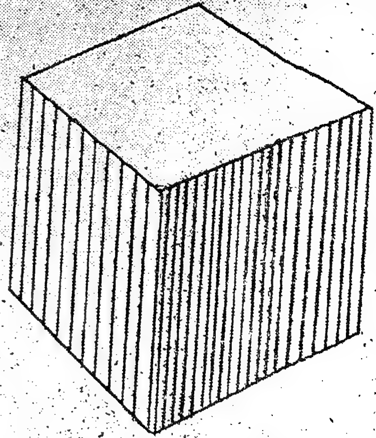
ही चित्रे अनेक भूमितीय आकार वापरून तयार करतात. उदाहरणार्थ :— घन, गोल, लंब-वर्तुळ वगैरे. कधी कधी घनाकार अनियमित आकृत्याही महत्त्वाच्या तुलनेप्रीत्यर्थ वापरतात (आकृती ३९ व ४०). अशा वेळेस तुलनेसाठी त्या आकृतीची उंची अथवा लांबी उपयोगात येत नाही, तर त्या आकृतीच्या घनफळाची तुलना करतात.

घनाकार चित्रामुळे न्यासाची परिशुद्ध अशी तुलना होऊ शकत नाही. तुलनेचे इतर प्रकार उपलब्ध असल्यास घनाकार चित्रांचा उपयोग टाळणेच हितकर असते.

नकाशे

भौगोलिक वंटन हे नकाशाद्वारे दाखविता येते. सांख्यिकीय आधाराने तयार होणारे अशा प्रकारचे नकाशे हे पाच प्रकारचे असतात. (१) छाया—







आकृती ३९ व ४० : डिसेंबर ३०, १९३० ला ग्रेट ब्रिटन व संयुक्तसंस्थानांत असलेला सोन्याचा साठा.

प्रकाशाने दाखविलेले. (२) निरनिराळ्या रेषांच्या उपयोगाने सूचित होणारे. (३) बिन्दूने दर्शविलेले. (४) रंगीत. (५) टाचण्याद्वारे दर्शित होणारे : (अ) टॆकस द्वारा, (ब) टाचणीद्वारा, (क) लहान ध्वजद्वारा.

छाया-प्रकाशाने दर्शित नकाशे :

निरनिराळ्या क्षेत्रांतील महत्त्वे प्रमाण कमी अधिक काळसर ते शुभ्र अशा छायाप्रकाशाने दाखवावे.

रेषा-गुंफण नकाशे :

रेषांतील गुंफण कमी-अधिक प्रमाणात काळी-पांढरी वाढवून न्यासातील राशी भौगोलिक महत्त्व सूचित करतात.

बिन्दूने दर्शविलेले नकाशे :

लहानमोठे बिन्दू वापरून हे नकाशे विशेषत: दोन प्रकारांनी तयार होतात.

(अ) समान-आकाराचे बिन्दू वापरून जे नकाशे तयार करतात त्यात फक्त ह्या बिन्दूचे प्रमाण कमी-अधिक केल्याने न्यासातील अंकाच्या घनतेचा बोध होतो.

(ब) लहान-मोठे बिन्दू वापरून तयार होणाऱ्या नकाशाद्वारे त्या विभागातील एकूण संख्येचा अथवा महत्त्वाचा बोध होतो.

(क) एकाच ठराविक आकाराचे, ठराविक किंमत असलेले, बिन्दू वापरून तयार होणाऱ्या नकाशाद्वारे प्रत्येक क्षेत्रातील राशी किती आहे ह्याची कल्पना येते.

अशा वेळेस तौलनिक महत्ता दर्शवावयाची असल्यास विशेष खबरदारी घ्यावयास हवी, कारण ही तुलना बिन्दूचे निव्वळ आकारमान वाढवून अथवा कमी करूनच करावयाची असते.

रंगीत नकाशे :

(अ) महत्त्वतील अथवा आकारमानातील फरक दाखवावयाचा असेल तर निरनिराळे रंग वापरावे. सापेक्ष अर्हा अथवा आकारमानासाठी रंगाच्या निरनिराळ्या छटा वापरू नयेत. कारण रंगांच्या ह्या छटेतील सूक्ष्मतर फरक नुसत्या नजरेने लक्ष्यात येत नाही; त्यामुळे घोटाळा होण्याचा संभव असतो.

(ब) एकाच प्रदेशातील तौलनिक स्थानांच्या दिग्दर्शनार्थ मात्र एकाच रंगाच्या निरनिराळ्या छटा वापरल्यास हरकत नाही. अर्थात एकाच रंगाच्या निरनिराळ्या छटांचे प्रकार सीमित असल्याने त्या वापरताना काळजी घ्यावी.

टेकस वापरून तयार होणारे नकाशे

निरनिराळ्या रंगांचे टेकस अथवा निरनिराळ्या रंगांच्या लहान ध्वजांचा उपयोग करून तयार होणाऱ्या नकाशाद्वारे अनेकविध उद्देश सफल होतात. विशेषतः त्यामुळे भौगोलिक क्षेत्रातील घनता प्रकट होते. युद्धभूमीवरील सैन्याची घनता, हालचाल, तसेच वाटचालीचे मार्गक्रमण, इत्यादिकांकरिता ह्याचा विशेष उपयोग होतो. **संरक्षण सांख्यिकीत** अशा नकाशांचे महत्त्व अतिशय आहे, कारण अशा प्रकारचे नकाशे हे दृक्दर्शनाचे एक फार प्रभावी अस्त्र होय !

परिशिष्ट:

परिशिष्ट १ : सारणी

१. छेदा-सारणी.

२. १ ते ५० अंकांच्या पहिल्या तीन वर्गांचे योग.

३. क्ष^{2}–सारणी.

परिशिष्ट २ : सूत्रांचा कोष.

परिशिष्ट ३ : शब्दांचा कोष.

परिशिष्ट ४ : संदर्भ व इतर ग्रंथांची सूचि.

वर्ग व वर्गमूळ.

सहसम्बन्ध मापांक.

• • •

छेदा–सारणी

	०	१	२	३	४	५	६
१०	·०००००	·००४३२	·००८६०	·०१२८४	·०१७०३	·०२११९	·०२५३१
११	·०४१३९	·०४५३२	·०४९२२	·०५३०८	·०५६९०	·०६०७०	·०६४४६
१२	·०७९१८	·०८२७९	·०८६३६	·०८९९१	·०९३४२	·०९६९१	·१००३७
१३	·११३९४	·११७२७	·१२०५७	·१२३८५	·१२७१०	·१३०३३	·१३३५४
१४	·१४६१३	·१४९२२	·१५२२९	·१५५३४	·१५८३६	·१६१३७	·१६४३५
१५	·१७६०९	·१७८९८	·१८१८४	·१८४६९	·१८७५२	·१९०३३	·१९३१२
१६	·२०४१२	·२०६८३	·२०९५२	·२१२१९	·२१४८४	·२१७४८	·२२०११
१७	·२३०४५	·२३३००	·२३५५३	·२३८०५	·२४०५५	·२४३०४	·२४५५१
१८	·२५५२७	·२५७६८	·२६००७	·२६२४५	·२६४८२	·२६७१७	·२६९५१
१९	·२७८७५	·२८१०३	·२८३३०	·२८५५६	·२८७८०	·२९००३	·२९२२६
२०	·३०१०३	·३०३२०	·३०५३५	·३०७५०	·३०९६३	·३११७५	·३१३८७
२१	·३२२२२	·३२४२८	·३२६३४	·३२८३८	·३३०४१	·३३२४४	·३३४४५
२२	·३४२४२	·३४४३९	·३४६३५	·३४८३०	·३५०२५	·३५२१८	·३५४११
२३	·३६१७३	·३६३६१	·३६५४९	·३६७३६	·३६९२२	·३७१०७	·३७२९१
२४	·३८०२१	·३८२०२	·३८३८२	·३८५६१	·३८७३९	·३८९१७	·३९०९४

२५	·३९७९४	·३९९६७	·४०१४०	·४०३१२	·४०४८३	·४०६५४	·४०८२४
२६	·४१४९७	·४१६६४	·४१८३०	·४१९९६	·४२१६०	·४२३२५	·४२४८८
२७	·४३१३६	·४३२९७	·४३४५७	·४३६१६	·४३७७५	·४३९३३	·४४०९१
२८	·४४७१६	·४४८७१	·४५०२५	·४५१७९	·४५३३२	·४५४८४	·४५६३७
२९	·४६२४०	·४६३८९	·४६५३८	·४६६८७	·४६८३५	·४६९८२	·४७१२९
३०	·४७७१२	·४७८५७	·४८००१	·४८१४४	·४८२८७	·४८४३०	·४८५७२
३१	·४९१३६	·४९२७६	·४९४१५	·४९५५४	·४९६९३	·४९८३१	·४९९६९
३२	·५०५१५	·५०६५१	·५०७८६	·५०९२०	·५१०५५	·५११८८	·५१३२२
३३	·५१८५१	·५१९८३	·५२११४	·५२२४४	·५२३७५	·५२५०४	·५२६३४
३४	·५३१४८	·५३२७५	·५३४०३	·५३५२९	·५३६५६	·५३७८२	·५३९०८
३५	·५४४०७	·५४५३१	·५४६५४	·५४७७७	·५४९००	·५५०२३	·५५१४५
३६	·५५६३०	·५५७५१	·५५८७१	·५५९९१	·५६११०	·५६२२९	·५६३४८
३७	·५६८२०	·५६९३७	·५७०५४	·५७१७१	·५७२८७	·५७४०३	·५७५१९
३८	·५७९७८	·५८०९२	·५८२०६	·५८३२०	·५८४३३	·५८५४६	·५८६५९
३९	·५९१०६	·५९२१८	·५९३२९	·५९४३९	·५९५५०	·५९६६०	·५९७७०
४०	·६०२०६	·६०३१४	·६०४२३	·६०५३१	·६०६३८	·६०७४६	·६०८५३
४१	·६१२७८	·६१३८४	·६१४९०	·६१५९५	·६१७००	·६१८०५	·६१९०९
४२	·६२३२५	·६२४२८	·६२५३१	·६२६३४	·६२७३७	·६२८३९	·६२९४१
४३	·६३३४७	·६३४४८	·६३५४८	·६३६४९	·६३७४९	·६३८४९	·६३९४९
४४	·६४३४५	·६४४४४	·६४५४२	·६४६४०	·६४७३८	·६४८३६	·६४९३३

४५	·६५३२१	·६५४१८	·६५५१४	·६५६१०	·६५७०६	·६५८०१	·६५८९६
४६	·६६२७६	·६६३७०	·६६४६४	·६६५५८	·६६६५२	·६६७४५	·६६८३९
४७	·६७२१०	·६७३०२	·६७३९४	·६७४८६	·६७५७८	·६७६६९	·६७७६१
४८	·६८१२४	·६८२१५	·६८३०५	·६८३९५	·६८४८५	·६८५७४	·६८६६४
४९	·६९०२०	·६९१०८	·६९१९७	·६९२८५	·६९३७३	·६९४६१	·६९५४८
५०	·६९८९७	·६९९८४	·७००७०	·७०१५७	·७०२४३	·७०३२९	·७०४१५
५१	·७०७५७	·७०८४२	·७०९२७	·७१०१२	·७१०९६	·७११८१	·७१२६५
५२	·७१६००	·७१६८४	·७१७६७	·७१८५०	·७१९३३	·७२०१६	·७२०९९
५३	·७२४२८	·७२५०९	·७२५९१	·७२६७३	·७२७५४	·७२८३५	·७२९१६
५४	·७३२३९	·७३३२०	·७३४००	·७३४८०	·७३५६०	·७३६४०	·७३७१९
५५	·७४०३६	·७४११५	·७४१९४	·७४२७३	·७४३५१	·७४४२९	·७४५०७
५६	·७४८१९	·७४८९६	·७४९७४	·७५०५१	·७५१२८	·७५२०५	·७५२८२
५७	·७५५८७	·७५६६४	·७५७४०	·७५८१५	·७५८९१	·७५९६७	·७६०४२
५८	·७६३४३	·७६४१८	·७६४९२	·७६५६७	·७६६४१	·७६७१६	·७६७९०
५९	·७७०८५	·७७१५९	·७७२३२	·७७३०५	·७७३७९	·७७४५२	·७७५२५
६०	·७७८१५	·७७८८७	·७७९६०	·७८०३२	·७८१०४	·७८१७६	·७८२४७
६१	·७८५३३	·७८६०४	·७८६७५	·७८७४६	·७८८१७	·७८८८८	·७८९५८
६२	·७९२३९	·७९३०९	·७९३७९	·७९४४९	·७९५१८	·७९५८८	·७९६५७
६३	·७९९३४	·८०००३	·८००७२	·८०१४०	·८०२०९	·८०२७७	·८०३४६
६४	·८०६१८	·८०६८६	·८०७५४	·८०८२१	·८०८८९	·८०९५६	·८१०२३

६५	·८१२९१	·८१३५८	·८१२४५	·८१४९१	·८१५५८	·८१६२४	·८१६९०	·
६६	·८१९५४	·८२०२०	·८२०८६	·८२१५१	·८२२१७	·८२२८२	·८२३४७	·
६७	·८२६०७	·८२६७२	·८२७३७	·८२८०२	·८२८६६	·८२९३०	·८२९९५	·
६८	·८३२५१	·८३३१५	·८३३७८	·८३४४२	·८३५०६	·८३५६९	·८३६३२	·
६९	·८३८८५	·८३९४८	·८४०११	·८४०७३	·८४१३६	·८४१९८	·८४२६१	·
७०	·८४५१०	·८४५७२	·८४६३४	·८४६९६	·८४७५७	·८४८१९	·८४८८०	·
७१	·८५१२६	·८५१८७	·८५२४८	·८५३०९	·८५३७०	·८५४२१	·८५४९१	·
७२	·८५७३३	·८५७९४	·८५८५४	·८५९१४	·८५९७४	·८६०३४	·८६०९४	·
७३	·८६३३२	·८६३९२	·८६४५१	·८६५१०	·८६५७०	·८६६२९	·८६६८८	·
७४	·८६९२३	·८६९८२	·८७०४०	·८७०९९	·८७१५७	·८७२१६	·८७२७४	·
७५	·८७५०६	·८७५६४	·८७६२२	·८७६७९	·८७७३७	·८७७९५	·८७८५२	·
७६	·८८०८१	·८८१३८	·८८१९५	·८८२५२	·८८३०९	·८८३६६	·८८४२३	·
७७	·८८६४९	·८८७०५	·८८७६२	·८८८१८	·८८८७४	·८८९३०	·८८९८६	·
७८	·८९२०९	·८९२६५	·८९३२१	·८९३७६	·८९४३२	·८९४८७	·८९५४२	·
७९	·८९७६३	·८९८१८	·८९८७३	·८९९२७	·८९९८२	·९००३७	·९००९१	·
८०	·९०३०९	·९०३६३	·९०४१७	·९०४७२	·९०५२६	·९०५८०	·९०६३४	·
८१	·९०८४९	·९०९०२	·९०९५६	·९१००९	·९१०६२	·९१११६	·९११६९	·
८२	·९१३८१	·९१४३४	·९१४८७	·९१५४०	·९१५९३	·९१६४५	·९१६९८	·
८३	·९१९०८	·९१९६०	·९२०१२	·९२०६५	·९२११७	·९२१६९	·९२२२१	·
८४	·९२४२८	·९२४८०	·९२५३१	·९२५८३	·९२६३४	·९२६८६	·९२७३७	·

८५	·९२९४२	·९२९९३	·९३०४४	·९३०९५	·९३१४६	·९३१९७	·९३२४७
८६	·९३४५०	·९३५००	·९३५५१	·९३६०१	·९३६५१	·९३७०२	·९३७५२
८७	·९३९५२	·९४००२	·९४०५२	·९४१०१	·९४१५१	·९४२०१	·९४२५०
८८	·९४४४८	·९४४९८	·९४५४७	·९४५९६	·९४६४५	·९४६९४	·९४७४३
८९	·९४९३९	·९४९८८	·९५०३६	·९५०८५	·९५१३४	·९५१८२	·९५२३१
९०	·९५४२४	·९५४७२	·९५५२१	·९५५६९	·९५६१७	·९५६६५	·९५७१३
९१	·९५९०४	·९५९५२	·९५९९९	·९६०४७	·९६०९५	·९६१४२	·९६१९०
९२	·९६३७९	·९६४२६	·९६४७३	·९६५२०	·९६५६७	·९६६१४	·९६६६१
९३	·९६८४८	·९६८९५	·९६९४२	·९६९८८	·९७०३५	·९७०८१	·९७१२८
९४	·९७३१३	·९७३५९	·९७४०५	·९७४५१	·९७४९७	·९७५४३	·९७५८९
९५	·९७७७२	·९७८१८	·९७८६४	·९७९०९	·९७९५५	·९८०००	·९८०४६
९६	·९८२२७	·९८२७२	·९८३१८	·९८३६३	·९८४०८	·९८४५३	·९८४९८
९७	·९८६७७	·९८७२२	·९८७६७	·९८८११	·९८८५६	·९८९००	·९८९४५
९८	·९९१२३	·९९१६७	·९९२११	·९९२५५	·९९३००	·९९३४४	·९९३८८
९९	·९९५६४	·९९६०७	·९९६५१	·९९६९५	·९९७३९	·९९७८२	·९९८२६

१ ते ५० अंकांच्या पहिल्या तीन वर्गांचे योग.

ड	यो(ड)	यो (ड^2)	यो (ड^3)	ड	यो (ड)	यो (ड^2)	यो (ड^3)
१	१	१	१	२६	३५१	६२०१	१२३,२०१
२	३	५	९	२७	३७८	६९३०	१४२,८८४
३	६	१४	३६	२८	४०६	७७१४	१६४,८३६
४	१०	३०	१००	२९	४३५	८५५५	१८९,२२५
५	१५	५५	२२५	३०	४६५	९४५५	२१६,२२५
६	२१	९१	४४१	३१	४९६	१०४१६	२४६,०१६
७	२८	१४०	७८४	३२	५२८	११४४०	२७८,७८४
८	३६	२०४	१२९६	३३	५६१	१२५२९	३१४,७२१
९	४५	२८५	२०२५	३४	५९५	१३६८५	३५४,०२५
१०	५५	३८५	३०२५	३५	६३०	१४९१०	३९६,९००
११	६६	५०६	४३५६	३६	६६६	१६२०६	४४३,५५६
१२	७८	६५०	६०८४	३७	७०३	१७५७५	४९४,२०९
१३	९१	८१९	८२८१	३८	७४१	१९०१९	५४९,०८१
१४	१०५	१०१५	११०२५	३९	७८०	२०५४०	६०८,४००
१५	१२०	१२४०	१४४००	४०	८२०	२२१४०	६७२,४००
१६	१३६	१४९६	१८४९६	४१	८६१	२३८२१	७४१,३२१
१७	१५३	१७८५	२३४०९	४२	९०३	२५५८५	८१५,४०९
१८	१७१	२१०९	२९२४१	४३	९४६	२७४३४	८९४,९१६
१९	१९०	२४७०	३६१००	४४	९९०	२९३७०	९८०,१००
२०	२१०	२८७०	४४१००	४५	१०३५	३१३९५	१०७१,२२५
२१	२३१	३३११	५३३६१	४६	१०८१	३३५११	११६८,५६१
२२	२५३	३७९५	६४००९	४७	११२८	३५७२०	१२७२,३८४
२३	२७६	४३२४	७६१७६	४८	११७६	३८०२४	१३८२,९७६
२४	३००	४९००	९००००	४९	१२२५	४०४२५	१५००,६२५
२५	३२५	५५२५	१०५६२५	५०	१२७५	४२९२५	१६२५,६२५

क्ष² – सारणी.

डा/ता.	·९९	·९५	·५०	·१०	·०५
१	·०००१५७	·००३९३	·४५५	२·७०६	३·८४१
२	·०२०१	·१०३	१·३८६	४·६०५	५·९९१
३	·११५	·३५२	२·३६६	६·२५१	७·८१५
३	·२९७	·७११	३·३५७	७·७७९	९·४८८
५	·५५४	१·१४५	४·३५१	९·२३६	११·०७०
६	·८७२	१·६३५	५·३४८	१०·६४५	१२·५९२
७	१·२३९	२·१६७	६·३४६	१२·०१७	१४·०६७
८	१·६४६	२·७३३	७·३४४	१३·३६२	१५·५०७
९	२·०८८	३·३२५	८·३४३	१४·६८४	१६·९१९
१०	२·५५८	३·९४०	९·३४२	१५·९८७	१८·३०७
११	३·०५३	४·५७५	१०·३४१	१७·२७५	१९·६७५
१२	३·५७१	५·२२६	११·३४०	१८·५४९	२१·०२६
१३	४·१०७	५·८९२	१२·३४०	१९·८१२	२२·३६२
१४	४·६६०	६·५७१	१३·३३९	२१·०६४	२३·६८५

डा/ता.	·९९	·९५	·५०	·१०	·०५
१५	५·२२९	७·२६१	१४·३३९	२२·३०७	२४·९९६
१६	५·८१२	७·९६२	१५·३३८	२३·५४२	२६·२९६
१७	६·४०८	८·६७२	१६·३३८	२४·७६९	२७·५८७
१८	७·०१५	९·३९०	१७·३३८	२५·९८९	२८·८६९
१९	७·६३३	१०·११७	१८·३३८	२७·२०४	३०·१४४
२०	८·२६०	१०·८५१	१९·३३७	२८·४१२	३१·४१०
२१	८·८९७	११·५९१	२०·३३७	२९·६१५	३२·६७१
२२	९·५४२	१२·३३८	२१·३३७	३०·८१३	३३·९२४
२३	१०·१९६	१३·०९१	२२·३३७	३२·००७	३५·१७२
२४	१०·८५६	१३·८४८	२३·३३७	३३·१९६	३६·४१५
२५	११·५२४	१४·६११	२४·३३७	३४·३८२	३७·६५२
२६	१२·१९८	१५·३७९	२५·३३६	३५·५६३	३८·८८५
२७	१२·८७९	१६·१५१	२६·३३६	३६·७४१	४०·११३
२८	१३·५६५	१६·९२८	२७·३३६	३७·९१६	४१·३३७
२९	१४·२५६	१७·७०८	२८·३३६	३९·०८७	४२·५५७
३०	१४·९५३	१८·४९३	२९·३३६	४०·२५६	४३·७७३

परिशिष्ट २ : सूत्रांचा कोष

वारंवारता बंटन-विश्लेषण

समान्तर-मध्यक (म)

(अवर्गित न्यास)...$म = यो_{ठ} / डा.$ (१)

वर्गित-न्यास :

(अ) दीर्घ-रीती : $म = यो\,(च \times ठ) / डा.$ (२)

(ब) लघु-रीती : $म = म' + \frac{यो\,(च \cdot घ)}{डा} \times श.$ (३)

मध्यका (मा)

(वर्गित न्यास)...

$$मा = ट_{1} + \frac{\frac{डा}{२} - द_{1}}{द_{२} - द_{1}}(ट_{२} - ट_{1}) \quad (४)$$

भूयिष्ठक (भू)

(वर्गित न्यास)

(१) ...$भू = ट_{1} + \frac{च_{1} - च_{0}}{२च_{1} - च_{0} - च_{२}}(ट_{२} - ट_{1})$ (५)

(२) ...$भू = म - ३\,(म - मा)$ (६)

(३) ...$भू = \bar{य} - (क्ष)\,(धि)$ (१३२)

गुणोत्तर-मध्यक (ण)

(अवर्गित न्यास)

(१) ...$ण = \sqrt[ड]{क_{1} \cdot क_{२} \cdot क_{३} \ldots क_{ड}}$ (७)

(२) ...$छे \cdot ण = \frac{छे \cdot क_{1} + छे \cdot क_{२} + \ldots + छे \cdot क_{ड}}{डा}$ (८)

हरात्मक–मध्यक (ह)

$$\frac{१}{ह} = \frac{\frac{१}{क_१} + \frac{१}{क_२} + \frac{१}{क_३} + \cdots\cdots + \frac{१}{क_ड}}{डा} \qquad (९)$$

मध्यक–विचलन (रि)

(अवर्गित न्यास) $रि = \frac{यो\bar{ठ}}{डा}$ किंवा $\frac{यो\bar{घ}}{डा}$

(वर्गित न्यास) $रि = यो_{(च.\ घ)} / डा.$ (१०)

प्रमाप–विचलन (धि)

(अवर्गित न्यास) $धि = \sqrt{यो.\ घ^२ / डा.}$ (११)

(वर्गित न्यास)

दीर्घ–रीती .... $धि = \sqrt{यो\ (च घ^२)\ / डा.}$ (१२)

ऋजु–रीती ... $धि = श \sqrt{\frac{यो.\ च\ (घ)^२}{डा} - \left(\frac{यो_{च\ घ}}{डा}\right)^२}$ (१३)

चतुर्थक–विचलन

$तु.\ वि. = \frac{तु_३ - तु_१}{२}$ (१४)

विचरण–मापांक (फा)

$फा = \frac{धि}{म} \times १००$ (१५)

विषमता–माप (ष)

(१) $ष = \frac{म - भू}{धि}$ (१६)

(२) $ष = ३\ (म - मा) / धि$ (१७)

(३) $ष = (तु_३ - मा) - (मा - तु_१) / तु.\ वि.$ (१८)

(४) $अ_३ = ऋ_३ / धि_३ = \sqrt{आ_१}$ (१३०)

(५) $क्ष = आ_१\ (आ_२ + ३) / २\ (५\ आ_२ - ६\ आ_१ - ९)$ (१३१)

ककुद–वक्रता (कु)

$$कु = आ_{२} - ३ \qquad (१२९)$$

वारंवारता बंटन विश्लेषण
(परिघातद्वारा)

स्वेच्छ–मूलबिन्दूपासून :

परिघात : $ल_{१} = यो.(च. घ) / डा.$ (१०८)

$ल_{२} = यो.च (घ^{२}) / डा.$ (१०९)

$ल_{३} = यो.च (घ^{३}) / डा.$ (११०)

$ल_{४} = यो.च (घ^{४}) / डा.$ (१११)

समान्तर–मध्यक ह्या मूल-बिन्दूपासून :

परिघात : $ऋ_{१} = यो. च (य) / डा = ०$ (११२)

$ऋ_{२} = यो. च. (य^{२}) / डा.$ (११३)

$ऋ_{३} = यो. च. (य^{३}) / डा.$ (११४)

$ऋ_{४} = यो. च. (य^{४}) / डा.$ (११५)

$ऋ_{२} = ल_{२} - ल_{१}^{२}$ (११६)

$ऋ_{३} = ल_{३} - ३. ल_{१}. ल_{२} + २. ल_{१}^{३}$ (११७)

$ऋ_{४} = ल_{४} - ४ ल_{१} ल_{३} + ६ ल_{१}^{२}. ल_{२} - ३ ल_{१}^{४}$ (११८)

वर्गणाकरिता शपर्डचे शोधन

संभागान्तरालात— (अ) प्रथम शोधित परिघात $ऋ'_{१} = ०$ (११९)

,, (ब) द्वितीय शोधित परिघात :

,, $ऋ'_{२} = ऋ_{२} - १ / १२$ (१२०)

,, (क) तृतीय शोधित परिघात : $ऋ'_{३} = ऋ_{३}$ (१२१)

,, (ड) चतुर्थ शोधित परिघात :

$ऋ'_{४} = ऋ_{४} - \frac{१}{२} ऋ_{२} + \frac{७}{२४०}$ (१२२)

$ऋ'_{२}$ (मूळ एककात) = $गा.^{२}$ $ऋ'_{२}$ (संभागान्तराल एककात) (१२३)

$ऋ'_{३}$ (मूळ एककात) = $गा.^{३}$ $ऋ'_{३}$ (संभागान्तराल एककात) (१२४)

$ऋ'_{४}$ (मूळ एककात) = $गा.^{४}$ $ऋ'_{४}$ (संभागान्तराल एककात) (१२५)

वक्र-प्ररूप-निकष

(विषमता) $\text{आ}_{१} = \text{ऋ}^{२}_{३} \,/\, \text{ऋ}^{३}_{२}$ (१२६)

(ककुद्-वक्रता) $\text{आ}_{२} = \text{ऋ}_{४} \,/\, \text{ऋ}^{२}_{२} = \text{ऋ}_{४} \,/\, \text{धि}_{४}$ (१२७)

$$\text{सि} = \frac{\text{आ}_{१}\,(\text{आ}_{२} + ३)^{२}}{४\,(४\,\text{आ}_{२} - ३\,\text{आ}_{१})\,(२\,\text{आ}_{२} - ३\,\text{आ}_{१} - ६)} \qquad (१२८)$$

कालिक श्रेणी विश्लेषण

सरल-रेषा : $\text{र} = \text{क} + \text{ख}\cdot\text{य}$ (१९)

सरल-रेषेकरिता प्रसामान्य समीकार :

(१) $\text{धी}\,(\text{र}) = \text{डा}\cdot\text{क} + \text{ख}\cdot\text{धी}\,(\text{य})$ (२३)

(२) $\text{धी}\,(\text{यर}) = \text{क}\cdot\text{धी}\,(\text{य}) + \text{ख}\cdot\text{धी}\,(\text{य})^{२}$ (२४)

सरलित अथवा असंयुक्त प्रसामान्य-समीकार :

(मूलबिन्दू न्यासाच्या मध्यभागी)

(१) $\text{धी}\,(\text{र}) = \text{डा}\cdot\text{क}.$ (२५)

(२) $\text{धी}\,(\text{यर}) = \text{ख}\cdot\text{धी}\,(\text{य}^{२})$ (२६)

एकेन्द्राकरिता समीकार :

(१) $\text{धी}\,(\text{र}) = \text{डा}\cdot\text{क} + \text{ख}\cdot\text{धी}\,(\text{य}) + \text{ग}\cdot\text{धी}\,(\text{य})^{२}$ (२८)

(२) $\text{धी}\,(\text{यर}) = \text{क}\cdot\text{धी}\,(\text{य}) + \text{ख}\cdot\text{धी}\,(\text{य}^{२}) + \text{ग}\cdot\text{धी}\,(\text{य}^{३})$ (२९)

(३) $\text{धी}\,(\text{य}^{२}\cdot\text{र}) = \text{क}\cdot\text{धी}\,(\text{य}^{२}) + \text{ख}\cdot\text{धी}\,(\text{य}^{३}) + \text{ग}\cdot\text{धी}\,(\text{य}^{४})$ (३०)

घातांक-श्रेणी :

$\text{र} = \text{क}.\ \text{ख}^{\text{य}}.$

$\text{छे}\cdot\text{र} = \text{छे}\cdot\text{क} + \text{य}\cdot\text{छे}\ \text{ख}.$

$\text{र} = \text{क}\cdot\text{य}^{\text{ख}}.$ (३५)

$\text{छे}\cdot\text{र} = \text{छेक} + \text{ख}\cdot\text{छेय}.$

सहसम्बन्ध :

आगणकातील प्रमाप-विभ्रम :

$\text{ध}_{\text{र}} = \sqrt{\text{यो}_{\text{घ}}^{२} \,/\, \text{डा}}$ (३७)

$$\text{ध}_\text{र}^{२} = \frac{\text{धी}(\text{र}^{२}) - \text{क}\cdot\text{धी}(\text{र}) - \text{ख}\cdot\text{धी}(\text{यर})}{\text{डा}\cdot} \qquad (४५)$$

सहसम्बन्ध—मापांक :

$$\text{द}^{२} = \frac{\text{क}\cdot\text{धी}(\text{य}) + \text{ख}\cdot\text{धी}(\text{यर}) - \text{डा}\cdot\text{ग}_\text{र}^{२}}{\text{धी}(\text{र}^{२}) - \text{डा}\cdot\text{ग}_\text{र}^{२}} \qquad (३८)$$

$$\text{द} = \frac{\text{त}}{\text{धि}_\text{य} \times \text{धि}_\text{र}} \qquad (३९)$$

सम्बन्धदिक्—रेषा :

$$\text{र}' = \text{द} \times \frac{\text{धि}_{\text{र}'}}{\text{धि}_{\text{य}'}} \times \text{य}' \qquad (४३)$$

किंवा :

$$\text{र} - \bar{\text{र}} = \text{द} \times \frac{\text{धि}_\text{र}}{\text{धि}_\text{य}} (\text{य} - \bar{\text{य}})$$

अनुस्थिती—सहसम्बन्ध :

$$\text{दि} = १ - \frac{६\ \text{धी}(\text{घा}^{२})}{\text{डा}(\text{डा}^{२} - १)} \qquad (४६)$$

'द' व 'दि' मधील संबंध :

$$\text{द} = २\ \text{ज्या}\left(\frac{\text{ति}}{६}\ \text{दि}\right) \qquad (४७)$$

स्पीअरमनचें सूत्र :

$$\text{दा} = १ - \frac{६\ \text{धी}(\text{छा})}{\text{डा}^{२} - १} \qquad (४८)$$

सहसम्बन्ध—देशना :

$$\text{दि}^{२}_{\text{रय}} = १ - \frac{\text{धा}_\text{र}^{२}}{\text{धि}_\text{र}^{२}} \qquad (५०)$$

$$\text{दि}_{\text{रय}} = \frac{\text{क}\cdot\text{धी}(\text{र}) + \text{ख}\cdot\text{धी}(\text{यर}) + \text{ग}\cdot\text{धी}(\text{य}^{२}\cdot\text{र}) - \text{डा}\cdot\text{ग}_\text{र}^{२}}{\text{धी}(\text{र}^{२}) - \text{डा}\cdot\text{ग}_\text{र}^{२}} \qquad (५२)$$

सहसम्बन्ध निष्पत्ती :

$$रि = \sqrt{१ - \frac{धि^{२}(कर)}{धि(र^{२})}} \qquad (५३)$$

सहसम्बन्ध रेखीयतेकरिता समन्विक्षा :

$$लि = रि^{२} - द^{२} \qquad (५४)$$

बहुगुण–सहसम्बन्धादिक् रेषा (रेखीय)

$$य_{१} = क + ख_{१२\cdot३४} य_{२} + ख_{१३\cdot२४} य_{३} + ख_{१४\cdot२३} य_{४} \qquad (५५)$$

बहुगुण–सहसम्बन्धादिक् रेषेकरिता प्रसामान्य समीकार

(१) $त_{१२} = ख_{१२.३४} धि^{२}_{२} + ख_{१३.२४} त_{२३} + ख_{१४\cdot२३} त_{२४}$

(२) $त_{१३} = ख_{१२.३४} त_{२३} + ख_{१३.२४} धि^{२}_{३} + ख_{१४.२३} त_{३४}$

(३) $त_{१४} = ख_{१२.३४} त_{२४} + ख_{१३.२४} त_{३४} + ख_{१४\cdot२३} धि^{२}_{४}$

बहुगुण सहसम्बन्धाकरिता आगणकातील प्रमाप–विभ्रम :

$$धा^{२}_{१\cdot२३४} = धि^{२}_{१} - ख_{१२\cdot३४} त_{१२} - ख_{१३\cdot२४} त_{१३} - ख_{१४\cdot२३} त_{१४}$$

$$धा_{१\cdot२३४} = \sqrt{\frac{धी(धा^{२})}{डा\cdot}}$$

अरेखीय बहुगुण सहसम्बन्ध–मापांक :

$$दा^{२}_{१\cdot२३४} = \frac{ख_{१२\cdot३४} त_{१२} + ख_{१३\cdot२४} त_{१३} + ख_{१४\cdot२३} त_{१४}}{धि^{२}_{१}}$$

$$दा_{१\cdot२३४} = \sqrt{१ - \frac{धा^{२}_{१.२३४}}{धि^{२}_{१}}} \qquad (५६)$$

आंशिक सहसम्बन्ध–मापांक :

$$द_{१२\cdot३} = \frac{द_{१२} - द_{१३}\cdot द_{२३}}{(१ - द^{२}_{१३})^{\frac{१}{२}} (१ - द^{२}_{२३})^{\frac{१}{२}}} \qquad (५७)$$

$$द_{१२\cdot ३४} = \frac{द_{१२\cdot ३} - द_{१४\cdot ३}\cdot द_{२४\cdot ३}}{(१ - द^{२}_{१४\cdot ३})^{\frac{१}{२}} (१ - द^{२}_{२४\cdot ३})^{\frac{१}{२}}} \qquad (५८)$$

संभाविता

शक्यतेची संभाविता : $त = \frac{क}{डा}$

प्रतिकूलांची संभाविता : $थ = ख / डा.$

बर्नोली-बंटनाचा समान्तर-मध्यक : $\bar{य} = डा.\ त.$

बर्नोली-बंटनाचे प्रमाप-विचलन : $धि_{ख} = \sqrt{डा.\ (त.\ ख)}$

सापेक्षात : $धि_{ख}\ \% = \sqrt{(त.\ ख) / डा.}$

पीयर्सन-बंटनाचे प्रमाप-विचलन : $धि_{त}^{२} = त.\ थ.\ ड - धी\ (त_{ड} - त)^{२}$

प्रसामान्य–वक्र :

$$रा = रा_{०}\ धा^{\frac{-य^{२}}{२.\ धि^{२}}}$$

किंवा

$$र = \frac{डा}{धि\sqrt{२\ ति}}\ धा^{\frac{-य^{२}}{२\ धि.}}$$

प्रसामान्य–वक्राचे भूयिष्ठ-अक्ष :

$$रा_{०} = \frac{डा}{धि\sqrt{२\ ति}} = \frac{डा}{२\cdot ५०६६२८\ धि.} \qquad (७१)$$

उत्तम–अन्वायोजनार्थ क्ष^{२}–समन्विक्षा :

$$क्ष^{२} = धी\left(\frac{(च_{०} - च)^{२}}{च}\right) \qquad (७२)$$

निदर्शन नियम

समान्तर-माध्याचा प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{\bar{य}} = धि / \sqrt{डा} \qquad (९२)$$

समान्तर-माध्याचा संभावि-विभ्रम : $सं.\ वि._{\bar{य}} = ०\cdot ६७४५\ धि / \sqrt{डा.}$

मध्यकाचे प्रमाप-विभ्रम : $धि_{मा} = १.२५३३\ धि / \sqrt{डा.}$

मध्यकाचे संभावि-विभ्रम : $सं.\ वि._{मा} = ०.८४५३५\ धि / \sqrt{डा.}$

प्रमाप-विचलनाचे प्रमाप-विभ्रम : $धि_{धि} = धि / \sqrt{२\ डा.}$

प्रमाप-विचलनाचे संभावि-विभ्रम : $सं.\ वि._{धि} = .६७४५\ धि / \sqrt{२\ डा.}$

मध्यक-विचलनाचे प्रमाप-विभ्रम : $धि_{रि} = .६०२८\ धि / \sqrt{डा.}$

मध्यक-विचलनाचे संभावि-विभ्रम : $सं.\ वि._{रि} = .४०६६\ धि / \sqrt{डा.}$

विचरण-मापांकाचे प्रमाप-विभ्रम : $धि_{फा} = \frac{फा}{\sqrt{२\ डा.}} \sqrt{१ + २\ (फा)^२}$

विचरण-मापांकाचे संभावि-विभ्रम :

$$सं.\ वि._{फा} = .६७४५\ फा / \sqrt{२\ डा} \times \sqrt{१ + २\ (फा)^२}$$

सहसम्बन्ध-मापांकाचे प्रमाप-विभ्रम : $धि_{द} = \frac{१ - द^२}{\sqrt{डा.}}$

सहसम्बन्ध मापांकाचे संभावि–विभ्रम : $सं.\ वि._{द} = .६७४५\ (१ - द^२ / \sqrt{डा})$

अनुस्थिति सहसंबंधाचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{दि} = \frac{१ - दि^२}{\sqrt{डा}}\ (१ + .०८६\ दि^२ + .०१३\ दि^४ + .००२\ दि^६)$$

अनुस्थिति सहसंबंधाचे संभावि विभ्रम :

$$सं.\ वि._{दि} = .६७४५\ \frac{१ - दि^२}{\sqrt{डा}}\ (१ + .०८६\ दि^२ + .०१३\ दि^४ + .००२\ दि^६)$$

बहुगुण सहसंबंधाचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{दा\ १.२३ \cdots ड} = \frac{१ - दा^२_{१.२३ \cdots ड}}{\sqrt{डा}}$$

बहुगुण सहसंबंधाचे संभावि-विभ्रम :

$$सं.\ वि._{दा\ १.२३ \ldots ड} = .६७४५\ \frac{१ - दा^२_{१.२३ \cdots ड}}{\sqrt{डा.}}$$

आंशिक सहसंबंधाचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{द_{१२\cdot३४\cdots ड}} = \frac{१ - द^{२}_{१२\cdot३४\cdots ड}}{\sqrt{डा.}}$$

आंशिक सहसंबंधाचे संभावि-विभ्रम :

$$सं.\ वि._{द_{१२\cdot३४\cdots ड}} = \cdot६७४५\ \frac{१ - द^{२}_{१२\cdot३४\cdots ड}}{\sqrt{डा.}}$$

दोन माध्यांतील अन्तराचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{घ} = \sqrt{धि^{२}_{\bar{य}_{१}} + धि^{२}_{\bar{य}_{२}}}$$

$$= \sqrt{\frac{धि^{२}_{१}}{डा_{१}} + \frac{धि^{२}_{२}}{डा_{२}}}$$

सहसंबंध-मापांकाचे सार्थकतेकरिता समान्विक्षा :

$$ल = \frac{१}{२}\left[छे_{घा}(१ + द) - छे_{घा}(१ - द) \right]$$

$$धि_{ल} = \frac{१}{\sqrt{डा - ३}}$$

माध्याभोवतीच्या द्वितीय परिघाताचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{ऋ_{२}} = \sqrt{\frac{ऋ_{४} - ऋ^{२}_{२}}{डा.}} = धि^{२}\sqrt{\frac{२}{डा.}}$$

माध्याभोवतीच्या तृतीय परिघाताचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{ऋ_{३}} = \sqrt{\frac{ऋ_{६} - ऋ^{२}_{३}}{डा}} = धि^{3}\sqrt{६ / डा.}$$

माध्याभोवतीच्या चतुर्थ परिघाताचे प्रमाप-विभ्रम :

$$धि_{ऋ_{४}} = \sqrt{\frac{ऋ_{८} - ऋ^{२}_{४}}{डा.}} = धि^{४}\sqrt{९६ / डा.}$$

'आ'$_{२}$ चे प्रमाप-विभ्रम : $धि_{आ_{२}} = \sqrt{२४/डा.}$

$\frac{\bar{य} - भू}{धि}$ मोजलेल्या विषमता-मापाकांचे प्रमाप-विभ्रम.

$$धि_{ष} = \sqrt{३ / २\ डा.}$$

चतुर्थक-विचलनाचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{धि}_{\text{तु. वि}} = \cdot ७८६७ \text{ धि} / \sqrt{\text{डा.}}$$

दोन प्रमाप-विचलनांतील अन्तराचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{धि}_{\text{धि}_१ - \text{धि}_२} = \sqrt{\text{धि}^२_{\text{धि}_१} + \text{धि}^२_{\text{धि}_२}}$$

दोन सहसम्बन्ध मापांकांतील अन्तराचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{धि}_{\text{द}_{१२} - \text{द}_{३४}} = \sqrt{\text{धि}^२_{\text{द}_{१२}} - \text{धि}^२_{\text{द}_{३४}}}$$

सम्बन्धदिक्-मापांकाचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{धि}_{\text{ख}_{\text{यर}}} = \frac{\text{धि}_{\text{य}}}{\text{धि}_{\text{र}}} \sqrt{\frac{१ - \text{द}^२_{\text{यर}}}{\text{डा.}}}$$

सहसम्बन्ध निष्पत्तीचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{धि}_{\text{रि}} = \frac{१ - \text{रि}^२}{\sqrt{\text{डा.}}}$$

लहान न्यादर्शातील समान्तर मध्यकेचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{घा}_{\bar{\text{य}}} = \frac{\text{ध}}{\sqrt{\text{डा.}}}$$

$$\text{ज्यात} : \text{ध}^२ = \frac{\text{यो}\,(\text{य}^२)}{\text{डा} - १} = \frac{\text{डा. धि}^२}{\text{डा} - १} \qquad (१०७)$$

लहान न्यादर्शांच्या समान्तर मध्यकेतील अन्तराचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{घा}_{\text{ध}} = \text{ध} / \sqrt{\text{डा}_१ \cdot \text{डा}_२ / \text{डा}_१ + \text{डा}_२}$$

$$\text{ज्यात} : \quad \text{ध}^२ = \text{यो}\,(\text{य}_१{}^२) + \text{यो}\,(\text{य}_२)^२ / \text{डा}_१ + \text{डा}_२ - २$$

दोन अर्धांतील अन्तराचे प्रमाप-विभ्रम :

$$\text{धि}_{\text{घा}\,\%} = \sqrt{\text{त. थ} \left(\frac{१}{\text{डा}_१} + \frac{१}{\text{डा}_२}\right)}$$

देशनांक

वास्तविक बाजारभावांचे असंयुक्त समूहन :

$$\text{यो}_{\text{त}_\text{ड}} / \text{यो}_{\text{त}_\circ} \qquad (७४)$$

सापेक्ष-बाजारभावांचे समान्तर-मध्यक :

$$\text{यो} (\text{त}_\text{ड} \mid \text{त}_\circ) / \text{डा}. \qquad (७५)$$

वास्तविक बाजारभावांचे भारित समूहन :

(अ) आधार-वर्ष भार म्हणून :

$$\text{यो} (\text{त}_\text{ड} \cdot \text{थ}_\circ) / \text{यो} (\text{त}_\circ \cdot \text{थ}_\circ) \qquad (७७)$$

(ब) दिलेले वर्ष भार म्हणून :

$$\text{यो} (\text{त}_\text{ड} \cdot \text{थ}_\text{ड}) / \text{यो} (\text{त}_\circ \cdot \text{थ}_\text{ड}) \qquad (७८)$$

सापेक्षांचे भारित-माध्य :

(अ) समान्तर-मध्यक (आधार-वर्ष भार म्हणून)

$$\frac{\text{यो} \left[\frac{\text{त}_\text{ड}}{\text{त}_\circ} \times (\text{त}_\circ \, \text{थ}_\circ) \right]}{\text{यो} (\text{त}_\circ \, \text{थ}_\circ)} \qquad (७९)$$

(ब) समान्तर-मध्यक (दिलेले वर्ष भार म्हणून)

$$\frac{\text{यो} \left[\frac{\text{त}_\text{ड}}{\text{त}_\circ} \times (\text{त}_\text{ड} \, \text{थ}_\text{ड}) \right]}{\text{यो} (\text{तड} \cdot \text{थड})} \qquad (८०)$$

आदर्श-देशनांक :

$$\sqrt{\frac{\text{यो} (\text{त}_\text{ड} \cdot \text{थ}_\circ)}{\text{यो} (\text{त}_\circ \, \text{थ}_\circ)} \times \frac{\text{यो} (\text{त}_\text{ड} \cdot \text{थ}_\text{ड})}{\text{यो} (\text{त}_\circ \, \text{थ}_\text{ड})}} \qquad (८१)$$

विविध सूत्रे :

'ड' – अंकाचे वर्गाचा योग :

$$\text{यो} (\text{ड}^2) = \frac{२ \cdot \text{ड}^3 + ३ \cdot \text{ड}^2 + \text{ड}}{६}$$

'द' – प्रमाणात 'ड' – वस्तूंच्या संचयनाची संख्या :

$$^{स}च_{न} = \frac{ड(ड-१)(ड-२)\ldots(ड-द+१)}{द(द-१)\ (द-२)\ldots१} = \frac{^{स}क्र_{न}}{द!}$$

'द' प्रमाणात 'ड' – वस्तूच्या क्रमचयाची संख्या :

$$^{स}क्र_{न} = \frac{ड!}{(ड-द)!} \qquad (ड!)$$

परिशिष्ट ३ : शब्दकोष :

अ

अचल–Constant
अजिह्म–Direct
अतितलीय– Hypersurface
अतिदेशीय–Hypersurface
अदीर्घवर्ण समायत–Latin Square
अधर चतुर्थक–Lower quartile
अधीक्षण–Survey
अन्तपद–Extremity
अन्तर–Difference
अन्तराल–Internal
अन्वायोजन–Fitting
वक्र अन्वायोजन–Curve Fitting
अन्वीक्षा–Trial
अनन्त–Infinite
अनन्तता–Infiniteness
अनन्ती–Infinity
अनभिनत–Unbiassed (Biassed आभिनत)
अनिश्चृत–Indeterminate
आनियामित–Irregular (Regular= नियामित)
अनुकल कलन–Integral Calculas
अनुक्रम–Sequence
अनुक्रामिक–Sequential
अनुगामी–Consecutive
अनुप्रस्थ–Horizontal
अनुपात–Proportion
अनुबद्ध–Conjugate
अनुलोम–Positive
अनुलोम सम्बन्ध–Positive association
अनुस्थिती–Rank
अनुसन्धान–Investigation
अनुसूची–Schedule
अनुविन्यसन–Array (v)
अनुविन्यास–Array (n)
अनुविन्यस्त–Arrayed
अपाकिरण–Dispersion
अपसारी–Divergent
अप्रत्यक्ष–Indirect
अभ्यंश–Quota
अभ्यावृत्ति–Replication
अभाज्य–Inolivisible
अभिनती–Bias
आभिनत–Biassed
आभिनत प्रवरण–Biassed Selection
अभिसारी–Convergent
अयुग्म–Odd
अर्घ–Rate
अर्हा–value
अल्पतमवर्गरीति–Method of least Square
अल्पिष्ठ–Minimum
अल्पिष्ठक–Anti-Mode
अल्पकालीन–Short term (a)
अवकल–Differential
अवकलन–Differentiate
अवरोहण–Descend
अवरोही क्रम–Descending order
अवलोक कलन–Calculas of observation
अवसर–Chance
अवसाद–Depression
अस्तिगुण–Positive attribute
अस्त्यात्मक–Positive
असतत–Discontinuous
असदृश–Dissimilar
असम–Unequal
असन्तुलित–Unbalanced
असामान्य–Abnormal
असंमिति–Assymmetry
अशोधित–Crude
अक्ष–Axis
अक्ष-वृत्त–Latitude
अज्ञात–Unknown
अन्तर्विभक्त–Subdivided

अभिवृद्धि–Boom
अभिवृद्धिकाल–Boom period

आ

आकलन–Summation
आकलनीय–Summable
आकालित–Summed
आकस्मिक Accidental
आकृति–Fo m
आगणन–Est. ate, Estimation
आगणक–Estimator
आधार–Base, Basis
आधारकाल–Base period
आधार परिवर्तन–Change of base
आधारभूत–Basic, Fundamental
आधाररेखा–Base line
आनुषंगिक–Concominitant
आपात–Incidence
आपूरक–Supplementary
आयत–Rectangle
आयताकार–Rectangular
आरम्भाबिन्दु–Starting point
आयतचित्र–Histogram
आयाम–Length
आर्तव–Seasonal
आरोहण–Ascend
आरोहिक्रम–Ascending order
आवर्तकाल–Period
आवर्ति–Recurring
आवर्तिक–Periodic, Periodical
आवर्तिता–Periodicity
आसन्न–Adjoining
आशंसा–Expectation
आंशिक–Partial
आयव्ययक–Budget
आय–Income

इ

इयत्ता–Quantity
इयत्तात्मक–Quantitative
इयत्तात्मक न्यास–Quantitative Data
इष्टका चित्र–Block Diagram.

उ

उच्च–High
उच्चावचन–Fluctuation
उत्क्रम–Inverse order
उत्तम अन्वायुक्तरेखा–Line of best fit
उत्तर चतुर्थक–Upper Quartile
उदग्र माप–Vertical scale
उदाहरण–Example
उपकल्पना–Hypothesis
अप्रतिष्ठेय उपकल्पना–Null Hypothesis
अप्रमुख उपकल्पना–Non-null Hypothesis
उपकाल्पानिक–Hypothetical
उपपात्ति–Proof
उपप्रमेय–Corollary
उपसदन } Approximate
उपसादन }
उपस्थापन–Presentation
उत्पादन–Production
उत्पादन गणना–Censure of production
उद्योग–Industry

ऊ

ऊर्ध्व बाहु वक्र–U-Shaped Curve

ए

एक–Individual, One
एकक–Uint
एकचलक–Univariate
एकघात–Linear
एकपद–Mononomial
एकरूपता–Uniformity
एकसम–Identical
एकात्म्य–Identical

एकिक नियम–Unitary method
एकेन्द्र–Parabola
औद्योगिक–Industrial

अं

अंक–Digit, Figure
अंकुशाकार वक्र–I-shaped curve
अंग–Component
अंश–Degree
अंशक–Grade
अंशतः–Partially

ऋ

ऋण संख्या–Negative number
ऋण–Debt

क

ककुद वक्रता–Kurtosis
ककुद्मी–Kurtic
कूट ककुद्मी–Lepto-Kurtic
चिपिट ककुद्मी–Platy Kurtic
मध्य ककुद्मी–Meso Kurtic
कल्पना–Assumption
कल्पित–Assumed
कलन–Calculus
कारण–Cause
कारणसम्बन्ध–Cause Relation
कारक–Factor
कारकीय संपरीक्षा–Factorial Experiment
काल–Time
कालिक श्रेणी–Time series
कालिक परिवर्तन–Time Changes
कुलक–Set
कूट–False, High
केन्द्र–Centre
केन्द्रीय–Central
कोटि अक्ष–Axis of ordinate
कोण–Angle
कोशा–Cell

ख

खण्ड–Part, Factor
खण्डित–Split

ग

गणन–Calculate
गणना, गणना–Calculatiou Census
गुण–Attribute
गुणक–Multiplier, Coefficient
गुणनखण्ड–Factor
गुणोत्तर मध्यक–Geometric mean
गुणोत्तर श्रेढी–Geometric progression
गोचर–Range
गौण–Aneillary, Secondary
गहन अनुसंधान–Intensive investigation
गुणनिर्दशन–Sample attribute

घ

घन–Cube
घनमूळ–Cube root
घात–Power
घातांक (घा)–Exponential (e)
घंटाकार वक्र–Bell shaped curve

च

चक्र–Cycle
चक्रिक–Cyclic
चाक्रिक क्रम–Cyclic order
चण्ड–Intensive
चतुर्थक–Quartile
प्रथम चतुर्थक–First Quartile
तृतीय चतुर्थक–Third Quartile
चतुष्कोण–Quadrangle
चतुर्भुज–Quadrilateral
चतुरंक सारणी–Four-figure Table
चरम सीमा–Extreme
चल–Variable
चलक–Variate
एक-चलक–Univariate

द्वि-चलक–Bivariate
बहु-चलक–Multivariate
सह-चलक–Co-Variate
परतन्त्र चलक–Dependent Variate
स्वतन्त्र चलक–Independent variate
चलनकलन–Differential Calculus
चालिष्णु माध्य–Moving average
चिपिट ककुद्मी–Platy-Kurtic
चित्र–Diagram

छ

छेदा–Logarithm
प्रातिच्छेदा–Anti-logarithem
छेदा पूर्णांश–Characteristic (of logarithm)
छेदा श्रेणी–Logarithmic Series

ज

जडता–Inertia
महांक जडता–Inertia of large numbers
जविसांख्यिकी–Biometry
जविनांक–Life statistics

(समन्विक्षा) त

त-समन्विक्षा–T-test
तत्त्व–Element
तथ्य–Fact
तरङ्ग विश्लेषण–Hormonic analysis
तल–Surface
ता^{2}-समन्विक्षा–T^2–test
तुलना–Comparison
तुलनात्मक–Comparative
तर्क–Argument
तथ्यसंबंध–Association of facts
तौलनिक–Comparable
तुलनीयता–Comparability

द

दण्डचित्र–Bar Diagram
दशमक–Decile
दशमिक Decimal
दशामिकन–Decimalization
दशामिकांश–Mautisoa (of logarithm
दक्षता–Efficiency
दाक्षिणायत विषमता–Positive skewress
दा^{2}--समन्वीक्षा–D^2–test
दीर्घ-कालीन long–term (a)
दार्घिदीर्घ वर्ण समायत–Greco-Latin square
देशना–Index
देशनांक–Index number
द्व्यर्थक–Ambiguons
द्वंद्व भाजन–Dictiotomy
द्विगुण सारणीयन–Double tabulation
द्विघात समीकार–Quadratic equation
द्विपद–Binomial
द्विपद-बंटन–Binomial distribution
द्वितीयक सामुग्री–Secondary data

ध

धनसंख्या–Positive number
धारिता–Capacity

न

नास्ति गुण–Negative attribute
निकष–Criterion
निदर्शन–Sampling
आभिनत निदर्शन–Biassed Sampling
निरपेक्ष निदर्शन–Objective Sampling

प्रातीतिक निदर्शन–Subjective sampling
सविचार निदर्शन–Conscious sampling
निदर्शन नियम–Theory of sampling
नियन्त्रण–Control
निरसन–Eliminate
निरंक–Blank
निरंक सारणी–Blank table
निर्वचन–Interpretation
निष्पत्ति–Ratio
निश्चल–Invariant
निश्चायक–Determine
न्यादर्श–Sample
न्यास–Data
न्यूनता–Decrease
निरपेक्ष–Absolute

प

पंक्ति–Row
पञ्चमक–Quintile
पद–Term
पदसंहति–Expression
पर्याप्त–Adequate
परतन्त्र–Dependent
परिणाम–Consequence
परिपूर्ण सहसम्बध–Perfect correlation
परिपृच्छा–Inquiry
परिभाषा–Definition
परिमा–Volume
परिमाण–Quantity
परिमित–Finite
परिवर्तन–Change
परिसीमा–Limitation
परिस्थिती–Condition
परिशुद्ध–Accurate
परिशुद्धतया–Accurately
परिशुद्धता–Accuracy
पत्रक–Card
पत्रक देशनांक–Card Index
पुनरावृत्ति–Repetition
पूर्ण–Complete
पूर्वानुसार–Successively
पूर्व संभाविता–Prior probability
प्रकृति–Charcater
प्रकार–Kind
प्रकारान्तरेण–Alternatively
प्रगुण–Property
प्रगणन–Enumeration
प्रगामी माध्य–Progressive Average
प्रचय–Common difference
प्रतिच्छेदा–Anti logarithm
प्रतिनिधि–Representative
प्रातिबन्ध–Condition
प्रतिवर्ष–Per annum
प्रतीप–Inverse
प्रतीप गमन–Regression
प्रतीपित–Inverted
प्रतीपित क्रम–Inverted order
प्रत्यक्ष–Direct
प्रथम–First
प्रदोल–Oscillation
प्रपत्र–Form
प्रभाग–Fraction
प्रमाप–Standard
प्रमापन–Standardization
प्रमाप-विचलन–Standard deviation
प्रमाप-विभ्रम–Standard error
प्रमेय–Theorem
प्रयोग–Application
प्ररूप–Type
प्रवरण–Selection

प्रसरलन–Graduation
प्रसामान्य–Normal
प्रसामान्य वक्र–Normal curve
प्रश्न–Question
प्रश्नावली–Questionnaire
प्राकृत–Natural
प्रांकन–Plotting
प्राचल–Parameter
प्राथमिक–Primary
प्राभागिक–Fractional
प्रारम्भिक–Elementary
प्रारूपिक–Typical
प्रारूपिक माध्य–Typical Average
परिशिष्ट–Appendix
परिधि–Circumferance

फ

फलित सांख्यिकी–Applied statistics
फ-समन्विक्षा–F-test

ब

बंटन–Distribution
प्रसामान्य बंटन–Normal distribution
द्विपद बंटन–Binomial distribution
बहुगुण–Manifold
बहुगुण संभाजन–Manifold Classification
बहुगुण सहसम्बन्ध–Multiple correlation
बहुगुण सारणीयन–Manifold tabulation
बहुगुणाई–Multiple valued
बहु चलक–Multi-variate
बहुपद–Multinomial
बिन्दु–Point
मूल-बिन्दु–Origin
बिन्दुक–Dot
बिन्दुरेखा–Graph
बिन्दुरेखीय–Graphical
बीज-गणित–Algebra
बीजिय–Algebraical

भ

भाग, भाजन – Division
भाज्य–Dividend
भार–Weight
भारित–Weighted
भिन्न–Fraction, different
भिन्नांक–Fractional number
भिन्नांग–Heterogeneous
भुज–Abscissa
भूमिति–Survey
भूयिष्ठ–Maximum
भूयिष्ठक–Mode
भ्रान्ति–Fallacy
भ्रान्तिकारी–Fallacious
भृति–Waze
भूयिष्ठ वर्ग–Model group
भूयिष्ठ उत्पादन–Model output

म

मध्यक–Mean
गुणोत्तर मध्यक–Geometric Mean
समान्तर मध्यक–Arithmetic Mean
हरात्मक मध्यक–Harmonic Mean
मध्य ककुद्मी–Meso-Kurtic
मध्यका–Median
महत्ता–Magnitude
महान–Great
महांक–Large number
माध्य–Average
चलिष्णु माध्य–Moving Average
प्रगामी माध्य–Progressive Average

भारित माध्य–Weighted Averge
वर्णनात्मक माध्य–Descriptive Average
माप–Measure
मात्रा–Quantity
मिश्र–Compound
मिश्रधन–Amount
मूर्त–Concrete
मूल नियम–First principle, fundamental
मध्यक विचलन–Mean deviation
माप-श्रेणी–Scale

य

य-अक्ष–X co-ordinate
याम–Co-ordinate
यावदनान्ति–Ad infinitum
युत–Plus
युग्म–Even, pair

र

र-अक्ष–Y- co-ordinate
रचना–Construction
रम्भ–Cylinder
राशि–Quantity
रेखा–Line
रेखीय–Linear
रूपान्तर–Transfermation
रूपानिर्देश–Specification
रैखिकीय–Geometrical

ल

लब्धि–Quotient
लम्ब–Perpendicular
लम्बकोणिन–Orthogonal
लक्षण–Characteristic
लक्षणात्मक–Qualitative
लघुरीति–Short-cut method
लेख-विभ्रम–Error of commission
लोप-विभ्रम–Error of onussion

व

वक्र– Curve
वक्र रेखा–Curved line
वक्र तल–Curved surface
वक्रता–Curvature
वक्र सरलन Smoothing of curve
वज्र-गुणन–Croso multiplication
वर्ग–Group, square
वर्गण–Grouping, squaring
वर्गमूळ–Square root
वर्गमूल निस्सारण–Extraction of square root
वर्गयोग–Sum of squares
अशोधित वर्गयेाग–Crude sum of squares
शोधित वर्गयोग–Corrected sum of squares
वर्णक्रम–Alphabatical order
वर्णनात्मक–Descriptive
वर्तुळ–Circular
वस्तु–Item
वामायत विषमता–Negative skewness
वारंवार–Frequent
वारंवारता–Frequency
संचयी वारंवारता–Cumulative frequency
वारंवारता वक्र–Frequency curve
वारंवारता बंटन–Frequency distribution
वारंवारता सारणी–Frequency table
वार्षिक–Annual
विकल्प–Alternative (n)
विकीर्ण–Discrete
विचरण–Variance, variation
विचरण-कलन–Calculus of variation
विचरणाचें अर्घ–Rate of variation

विचरण विश्लेषण–Analysis of variance
विचलन– Deviation
प्रमाप विचलन–Standard deviation
वितनन–Extend
वितत–Extended
वितान–Extension
वितानी– Extensive
विताति–Extent
विधि–Method
विभाजन–Divide (v)
विभ्रम–Error
निरपेक्ष विभ्रम–Absolute error
प्रमाप विभ्रम–Standard error
सम्भावि विभ्रम–Probable error
विमा–Dimension
विलम्बन–Lag
विलम्बित सहसम्बन्ध–Lag correlation
विलोपन–Cancel
विलोम–Negative, Converse
विलोमता–Inversion
विलोम सम्बन्ध–Negative association
विलोम सहसम्बन्ध–Negative correlation
विस्तरण–Expand (v. i.)
विस्तारण–Expand (v. t.)
विस्तृत, विस्तारित } Expanded
विस्तारण–Expansion
विस्तृत अनुसन्धान–Extensive Investigation
विषम–Skew
विषमता–Skewness
दक्षिणायत विषमता–Positive skewness
वामायत विषमता–Negative skewness
विषम प्रविचाली– Heteroscedastic
विश्लेषण–Analysis
विश्रम्भ अन्तराल–Confidance interval
वैकल्पिक–Alternative (a)
वैश्लेषिक–Analytical
वृत्त–Circle
व्यवस्थापन–Adjustment
व्यवहार–Application
व्यापक–Comprehensive
व्यावहारिक–Applied
व्यास–Diameter
व्युत्क्रम–Reciprocal
व्युत्पन्न–Derivative
व्युत्पादन–Derive
व्युत्पादितDerived
वर्गीकरण–Classification
विन्यसन–Arrange
विन्यस्त– Arranged

श

शक्य–Possible
शक्यतया–Possibly
शक्यता–Possibility
शतमक–Percentile
शिखर–Peak
शिरोवार–Bar
शुद्ध–Correct
शून्य–Cipher
शोधित–Corrected
शंकु–Cone
शांकव्य–Conical
श्रित–Function
श्रृंखला–Chain
श्रेणी–Series
श्रैणिक–Serial
शकल–Sector

शृंखला मूल्यानुपात–Chain relative
शेष–Balance

स

सत्य–True
सत्यापन–Verify
सत्यापित–Verified
सतत– Continuous
सदृश–Analogus, Similar
सम्बन्ध–Association
अनुलोम सम्बन्ध–Positive association.
विलोम सम्बन्ध–Negative association
सम्बन्धदिक्–Regression
सम Equal
समग्र–Universe, Population
समदूर–Equidistant
समाधिक–Additional
समन्वय Coordination
समन्वीक्षा–Test
समनुविधान– Design
असन्तुलित समनुविधान– Unbalanced design.
अंशतः सन्तुलित समनुविधान–Partially balanced design
सन्तुलित समनुविधान–Balanced design
सम-प्रविचाली–Homoqudastic.
सम-सम्भाविक–Random
समाकुलन–Confounding
समाङ्ग–Homogeneous
समायत–Square
अदीर्घवर्ण समायत–Latin Square
दीर्घादीर्घ वर्ण समायत–Greco–Latin Square
समायोजन–Adjustment
समूह–Aggregate (n.)
समूहन–Aggregate (v.)
समूही–Aggregative
समीकरण–Equate.
समीकार–Equation
समंक–Statistics
सरल–Simple
सरलन–Smoothing
सरलित–Smoothed
सरलरेखा–Straight line
सर्वांग-सम–Congruent
सर्वान्तर–Common difference
सविचार निदर्शन–Conscious Sampling
सस्य पूर्वानुमान–Crop forecasting
सहचल–Co-variant
सह-विचरण–Co–variance
सहसम्बन्ध–Correlation
अनुस्थिति–सहसम्बन्ध–Rank correlation
अन्तःसंभाग सहसम्बन्ध –Interclass Correlation
संभागान्तः सहसम्बन्ध–Intraclass Correlation
मिथ्या सहसम्बन्ध–Spurious Correlation
श्रैणिक सहसम्बन्ध–Serial Correlation
सांख्य–Numerical
सांख्यिकी,संख्यान,संख्यानक-Statistics
सांख्यिकीय, संख्यानीय–Statistical
सांख्यिक, संख्याता, संख्यानिक Statistician
सांभाविकी–Theory of probability
साधारण–General
सापेक्ष–Relative
सामान्य–Common, Normal
सामान्यक–Norm
सामान्य गुणनखण्ड–Common factor.

सारणी–Table
सारणीयन–Tabulation
मिश्र सारणयिन– Complex Tabulation
सार्थक–Significant.
सार्थकता–Significance.
सार्थकता की मात्रा–Level of significance
सीमा–Limit
सुतथ्य–Precise
सुदीर्घकालीन–Secular (extending over a long period).
सूचना–Information.
सूक्ष्मग्राही–Sensitive
सूत्र–Formula
संकलन–Adding, Compilation
सकेत–Symbol
संख्या–Number
संख्यापद–Numerical term
संगत–Valid
संगणना–Census
संगमाबिन्दु–Point of concurrence
संग्रहण–Collection
संग्रथित–Composite
संगामी–Concurrent
संचयन–Combination
संचयी–Cumulative
संपरीक्षा–Experiment
संभाग–Class
संभाजन–Classification
संभावना–Contingency, Chance, Likelihood
सभावी–Probable
संभाविता–Probability
उत्क्रम संभाविता–Inverse probability
उत्तर संभाविता–Posterior probability
पूर्व संभाविता–Prior probability
युक्त संभाविता–Joint probability
सप्रातिबन्ध संभाविता–Conditional probability
सम्भाव्य–Stochaistic
सामिति–Symmetry
समितीय–Symmetrical
संयोजन–Combination
संरेख–Collinear
संलग्न–Adjacent
संवादी–Corresponding
स्तंभ–Column
स्तर–Strata
स्तृत–Stratified
स्थिर–Fixed
स्वतंत्र–Independent
स्वतंत्रता–Freedom
स्वासिद्ध–Axiom
स्वेच्छ–Arbitrary
सजातीय–Homogeneous
सकल–Gross

ह

हर–Denominator
हरात्मक मध्यक–Harmonical mean

क्ष

क्षैतिज–Horizontal
क्षेत्र–Field
क्षेत्रफल–Area

त्र

त्रिज्या–Radius
त्रिभुज–Triangle
त्रिभुजाकार–Triangular

गणित व संख्याशास्त्रातील संज्ञा.

सारणी १

(अ) रोमन अक्षरांशी संबधित नाही असे ग्रीक-वर्ण.

(१)	α	अ		Ψ	ऐ
	β	आ		ω	ओ
	γ	इ		Ω	औ
(२)	δ	ई	(४)	λ	ऋ
	ε	उ		μ	ॠ
(३)	θ	ऊ		ν	ऌ
	ϕ	ए			

सारणी २

(ब) अचलांचा श्रैणिक वर्ग

	रोमन वर्ण				ग्रीक वर्ण			
	लहान अक्षर		मोठे अक्षर		लहान अक्षर		मोठे अक्षर	
(१)	a	क	A	का	α	कि		
	b	ख	B	खा	β	खि		
	c	ग	C	गा	γ	गि	Υ	गी
	d	घ	D	घा	δ	घि	Δ	घी
	e	ङ	E	ङा	ε	ङि		
(२)	f	च	F	चा	θ	चि		
	g	छ	G	छा	ϕ	छि		
	h	ज	H	जा	Ψ	जि		
(३)	i	श	I	शा	ι	शि		
	j	ष	J	षा				
	k	स	K	सा	κ	सि		
(४)	l	ट	L	टा	λ	टि		
	m	ठ	M	ठा	μ	ठि		
	n	ड	N	डा	ν	डि		
	o	ढ	O	ढा	ω	ढि	Ω	ढी
(५)	p	त	P	ता	π	ति		
	q	थ	Q	था				
	r	द	R	दा	ρ	दि		
(६)	s	ध	S	धा	σ	धि	Σ	धी
	t	न	T	ना	Υ	नि		
(७)	u	प	U	पा				
	v	फ	V	फा				
	w	ब	W	बा				
(८)	x	य	X	या	ξ	थि		
	y	र	Y	रा	η	रि		
	z	ल	Z	ला	ζ	लि		

(१) In the case of sides and angles of a triangle in plane and spherical trignometry angles shall be denoted by अकारान्त consonants, and the opposite or corresponding sides by the corresponding आकारान्त letters.

e. g. $\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$ would be

$$\frac{\text{ज्याक}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्याख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्याग}}{\text{गा}}$$

Where small letters and related capital letters occur together in English, the general arrangement should be followed :

e. g. $ax + by + c = 0$ क य + ख र + ग = ०

$Ax + By + C = 0$ का य + खा र + गा = ०

$Pp + Qq + Rr = 0$ ता त+ था थ+ दा द= ०

(२) In naming figures, where capital letters are used in English, the points should be denoted by अकारान्त consonants, choosing groups from the above table as far as possible.

(३) ब, the first letter of बिन्दु, is recommended as the substitute for P, the point.

(4) म, the first letter of मूलबिन्दु, should be used for O, the Origin. The radius vector OP will thus be represented by मब.

(5) The symbol for the number π equal to 3.1416........ will be प्या, since $\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$, the conjunct consonant ending in long आ being necessary to give it a distinctive sound.

6) For small r = radius vector, त्र shall be used, being the significant consonant in (सदिश) त्रिज्या.

(7) p will be represented by त्रि; being the first letter of त्रिज्या, the radius of curvature.

(8) r, θ, ϕ Co-ordinate systems will be त्र, ऊ, ए

(9) s, ψ pedal Co-ordinates will be च, ऐ.

(10) n as any number will be represented by स of (काचित्) संख्या.

(11) r or t used as represented term will be न (निरूपित पद)

(12) r as a running term will be ध (धावि पद)

(13) e as the exponential will be represented by घा (abbreivated from घात) so that e^x is घा^य.

(14) The cartesian co-ordinate x, y, z will be य, र, ल.

(15) The letter म does not come anywhere in सारणी २. It is, therefore, available for being used as an unspecified general constant.

(16) Other symbols required in mathematics will be abbreviations for which the general rule to be followed is to select the first consonant with the vowel or the first vowel, dropping the उपसर्ग. In the case of a compound word, the abbreviation is to be taken from the more significant member of the compound.

(17) e^x read as e to power x wiil be घा^य. घा घात य.
,, ,, e raisad to x घा उन्नीत य.
,, ,, ex घा, य.

(18) $a = b$ will be क = ख read as क सम ख.

(19) $r = n$ ध = स
Σ will be य read as योग ध सम शून्य यावत् ध सम स.
$r = 0$ ध = ०

(20) In the above letter य has been used as an abbreviation of योग to represent summation for which Σ is used in English. The written symbol य is to be read as योग.

(21) $\chi = \log_b a$ will be य = छे$_{\text{ख}}$क read as य सम छेदा क आधार ख.

(22) Napierian log will be घा छेदा meaning छेदा आधार घा and log will be छेदा, for which the symbol will be छे.

(23) $a^x = 1 + x \log_e a + \frac{x^2 (\log_e a)^2}{\lfloor 2} + \ldots + \frac{x^n (\log_e a)^n}{\lfloor n}$

$\text{क}^{\text{य}} = 1 + \text{य छे}_{\text{घा}}\text{क} + \frac{\text{य}^2 (\text{छे}_{\text{घा}}\text{क})^2}{\lfloor 2} + \ldots + \frac{\text{य} (\text{छे}_{\text{घा}}\text{क})^{\text{स}}}{\lfloor \text{स}}$

(24) $\lfloor n$ will be $\lfloor$स read as हत स. (हत abbreviated from एकादिहत). n ! will be स read as स हत.

(25) $\frac{a}{b}$ will be $\frac{\text{क}}{\text{ख}}$ read as क भाजित ख (a by b) or क नीचैः ख (a upon b).

(26) a×b will be क × ख read as क गुणित ख (a into b).

(27) a+b will be क + ख read as क युत ख (a added to b) or क अधिक ख, क धन ख (a plus b).

(28) a–b will be क – ख read as क वियुत ख (a subtracted by b) or क उन ख, क ऋण ख (a minus b).

(29) The positive sign will be called अधिक or धन. the negative sign उन or ऋण.

± will be read as अधिकोन,

∓ will be read as उनाधिक.

(30) Lt limit n tending to infinity will be

$\lim_{n \to \infty}$

सी read as सीमा स अनन्ताभिगामी.

स → ∞

(31) Arrow (→) will be called बाण.

(32) Rapidly convergent series शीघ्र अभिसारी श्रेणी.
Slowly divergent series मंद अपसारी श्रेणी.

(33) nth will be स- वां. (in Hindi or Marathi) or स–तम (according to Sanskrit)

(n + 1) th will be (स + १) – वां (Hindi or Marathi)
or (स + १) – तम (according to Sanskrit)
१०० th शत– तम.

(34) Dot will be बिंदुक, dash प्रास, and bar दण्ड.

(35) Determinant $\triangle$ = नी (निश्चायक)
$\triangle_\circ$ = नी॰ read as नी शून्य
$\triangle'$ = नी' read as नी प्रास

(36) Discriminant $\triangle$ = वे (विवेचक)

(37) Q (quotient) = भा (भागफल)
P (product) = फ (गुणनफल)
R (remainder) = श अवशेष)

(38) $\sqrt{a}$ will be √क read as करणी–चिन्हे क

(39) $a > b$ will be क > ख read as क ज्यायस् ख
$a < b$ will be क < ख read as क कनियस् ख

(40) Round brakets ( ) will be called गोलाभिवार, Square brackets [ ] कोणाभिवार, and braces { } प्राभिवार, Vinculum शिरोवार

(41) etc. is इत्यादि

(42) ^nP_r will be devoted by सक्रन and ^nC_r by सचन, च and क being taken from संचय and क्रमचय

(43) In ^nC_r = सचन the supercript स will be called वाम मूर्धन्य and the Subscript न will be called दक्षिण पाद्य

(44) Superscript मूर्धाक्षर (letters written at the top)
Subscript पादाक्षर (letters written at the foot)

(45) Trigonometrical Symbols

Sin θ ज्या ऊ	Cosec θ व्युज्ज्या ऊ
Cos θ कोज्या ऊ (कोटिज्या)	Sec θ व्युत्कोज्या ऊ
Tan θ स्प ऊ (स्पर्शज्या)	Cot θ कोस्प ऊ

Inverse प्रतीप
$\sin^{-1} x$ wll be ज्या –१ य read as प्रतीप ज्या य.
Radian measure आरीय कोण माप
Degree angle measure आंशिक कोण माप.

$\sin \pi = 0$ ज्या प्या = ०

$\cos \pi = -1$ कोज्या प्या = – १

Versed Sin x = 1–Cos x उत्क्रम ज्या. य = उज्ज्या य.

Hyperbolic अधीन्द्र (एकाद् अधिक उत्केन्द्रता)

Sin h अ ज्या (अ for अधीन्द्र), Cos h अ कोज्या

(46) Co-ordinates याम.

(47) Variable चल. Variation चलन. Increment वर्धन.

(48) Differential अवकल Differential Calculus चलन कलन
Differential Coefficient अवकल गुणक.

(49) f (x) श्रि (य) from श्रित (य). F (x) श्रा (य). $\phi(x)$ श्री (य)

So that y = f (x) .... र = श्रि (य)

y = F (x) .... र = श्रा (य)

y = ϕ (x) ... र = श्री (य).

(50) Operate करण. Operation करण. Operator कारण.

(51) Integration = अनुकलन.

(52) The sign of integration will be अ from अनुकलन.

(i) $\int ydx$ will be अ रचय read as अनुकलन रचय

(ii) Integral of y with respect to x
between the limits a and b

$\int_a^b ydx$ will be अ $\frac{\text{ख}}{\text{क}}$ रचय, read as अनुकल सीमे क ख रचय.

(र चा अनुकल, य प्रति, क आणि ख सीमेंत)

परिशिष्ट ४ : संदर्भ व इतर ग्रंथांची सूची.

Chaddock, Robert E. Principles and Methods of statistics. Honghton, Mifflin Co. New York 1925.

Croxton, F. E.; and Crowden, D. J.; Practical Business statistics Prentice Hall Inc. New York 1934.

Kelly, Trueman L., Statistical Methods, Macmillan & Co., New York 1923.

Mills, Frederick c; Satistical Methods, Henry Holt & Co. New York 1924.

Yule, G. udney. An introduction to the theory of statistics, Chades Griffin & Co., Ltd. London, 1929.

Connor, L. R. Statistics in theory and practice, Sir Isac Pitman & Sons. Ltd., London.

Barlow, Tables of Squares, cubes, square roots, cube-roots, Reciprocals. Spon & Chamberlain, New York 1919.

Fisher & Yates : Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research.

Fisher R. A. Statistical Methods for Research workers, Oliver & Boyol, Edinborough 1938.

Arkin & Colton, An outline of statistical Methods; Barnes & Noble. Inc. New York 1938.

Croxton & Cowden; Applied General Statistics Prentice Hall, Inc. New York, 1934.

Freeman, H. A. Industrial Statistics, John Wiley & Sons. Inc. London, 1944.

Mills F. C; Statistical Methods applied to Economics & Business; Henry Holt & Co. New York, 1924.

परिशिष्ट १ : (४) वर्ग व वर्गमूळ

‘ड’	‘ड²’	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
१·००	१.००००	१·०००००	३·१६२२८
१·०१	१·०२०१	१·००४९९	३·१७८०५
१·०२	१·०४०४	१·००९९५	३·१९३७४
१·०३	१·०६०९	१·०१४८९	३·२०९३६
१·०४	१·०८१६	१·०१९८०	३·२२४९०
१·०५	१·१०२५	१·०२४७०	३·२४०३७
१·०६	१·१२३६	१·०२९५६	३·२५५७६
१·०७	१·१४४९	१·०३४४१	३·२७१०९
१·०८	१·१६६४	१·०३९२३	३·२८६३४
१·०९	१·१८८१	१·०४४०३	३·३०१५१
१·१०	१·२१००	१·०४८८१	३·३१६६२
१·११	१·२३२१	१·०५३५७	३·३३१६७
१·१२	१·२५४४	१·०५८३०	३·३४६६४
१·१३	१·२७६९	१·०६३०१	३·३६१५५
१·१४	१·२९९६	१·०६७७१	३·३७६३९
१·१५	१·३२२५	१·०७२३८	३·३९११६
१·१६	१·३४५६	१·०७७०३	३·४०५८८
१·१७	१·३६८९	१·०८१६७	३·४२०५३
१·१८	१·३९२४	१·०८६२८	३·४३५११
१·१९	१·४१६१	१·०९०८७	३·४४९६४
१·२०	१·४४००	१·०९५४५	३·४६४१०

'ह'	'ह^{2}'	$\sqrt{\text{ह}}$	$\sqrt{\text{१०ह}}$
१·२१	१·४६४१	१·१०००००	३·४७८५१
१·२२	१·४८८४	१·१०४५४	३·४९२८५
१·२३	१·५१२९	१·१०९०५	३·५०७१४
१·२४	१·५३७६	१·११३५५	३·५२१३६
१·२५	१·५६२५	१·११८०३	३·५३५५३
१·२६	१·५८७६	१·१२२५०	३·५४९६५
१·२७	१·६१२९	१·१२६९४	३·५६३७१
१·२८	१·६३८४	१·१३१३७	३·५७७७१
१·२९	१·६६४१	१·१३५७८	३·५९१६६
१·३०	१·६९००	१·१४०१८	३·६०५५५
१·३१	१·७१६१	१·१४४५५	३·६१९३९
१·३२	१·७४२४	१·१४८९१	३·६३३१८
१·३३	१·७६८९	१·१५३२६	३·६४६९२
१·३४	१·७९५६	१·१५७५८	३·६६०६०
१·३५	१·८२२५	१·१६१९०	३·६७४२३
१·३६	१·८४९६	१·१६६१९	३·६८७८२
१·३७	१·८७६९	१·१७०४७	३·७०१३५
१·३८	१·९०४४	१·१७४७३	३·७१४८४
१·३९	१·९३२१	१·१७८९८	३·७२८२७
१·४०	१·९६००	१·१८३२२	३·७४१६६

'ड'	'ड२'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
१.४१	१.९८८१	१.१८७४३	३.७५५००
१.४२	२.०१६४	१.१९१६४	३.७६८२९
१.४३	२.०४४९	१.१९५८३	३.७८१५३
१.४४	२.०७३६	१.२००००	३.७९४७३
१.४५	२.१०२५	१.२०४१६	३.८०७८९
१.४६	२.१३१६	१.२०८३०	३.८२०९९
१.४७	२.१६०९	१.२१२४४	३.८३४०६
१.४८	२.१९०४	१.२१६५५	३.८४७०८
१.४९	२.२२०१	१.२२०६६	३.८६००५
१.५०	२.२५००	१.२२४७४	३.८७२९८
१.५१	२.२८०१	१.२२८८२	३.८८५८७
१.५२	२.३१०४	१.२३२८८	३.८९८७२
१.५३	२.३४०९	१.२३६९३	३.९११५२
१.५४	२.३७१६	१.२४०९८	३.९२४२८
१.५५	२.४०२५	१.२४४९९	३.९३७००
१.५६	२.४३३६	१.२४९००	३.९४९६८
१.५७	२.४६४९	१.२५३००	३.९६२३२
१.५८	२.४९६४	१.२५६९८	३.९७४९२
१.५९	२.५२८१	१.२६०९५	३.९८७४८
१.६०	२.५६००	१.२६४९१	४.०००००

'ड'	'ड२'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
१·६१	२·५९२१	१·२६८८८६	४·०१२४८
१·६२	२·६२४४	१·२७२७९	४·०२४९२
१·६३	२·६५६९	१·२७६७१	४·०३७३३
१·६४	२·६८९६	१·२८०६२	४·०४९६९
१·६५	२·७२२५	१·२८४५२	४·०६२०२
१·६६	२·७५५६	१·२८८४१	४·०७४३१
१·६७	२·७८८९	१·२९२२८	४·०८६५६
१·६८	२·८२२४	१·२९६१५	४·०९८७८
१·६९	२·८५६१	१·३००००	४·११०९६
१·७०	२·८९००	१·३०३८४	४·१२३११
१·७१	२·९२४१	१·३०७६७	४·१३५२१
१·७२	२·९५८४	१·३११४९	४·१४७२९
१·७३	२·९९२९	१·३१५२९	४·१५९३३
१·७४	३·०२७६	१·३१९०९	४·१७१३३
१·७५	३·०६२५	१·३२२८८	४·१८३३०
१·७६	३·०९७६	१·३२६६५	४·१९५२४
१·७७	३·१३२९	१·३३०४१	४·२०७१४
१·७८	३·१६८४	१·३३४१७	४·२१९००
१·७९	३·२०४१	१·३३७९१	४·२३०८४
१·८०	३·२४००	१·३४१६४	४·२४२६४

'ड'	'ड²'	√ड	√१०ड
१·८१	३·२७६१	१·३४५३६	४·२५४४१
१·८२	३·३१२४	१·३४९०७	४·२६६१५
१·८३	३·३४८९	१·३५२७७	४·२७७८५
१·८४	३·३८५६	१·३५६४७	४·२८९५२
१·८५	३·४२२५	१·३६०१५	४·३०११६
१·८६	३·४५९६	१·३६३८२	४·३१२७७
१·८७	३·४९६९	१·३६७४८	४·३२४३५
१·८८	३·५३४४	१·३७११३	४·३३५९०
१·८९	३·५७२१	१·३७४७७	४·३४७४१
१·९०	३·६१००	१·३७८४०	४·३५८९०
१·९१	३·६४८१	१·३८२०३	४·३७०३५
१·९२	३·६८६४	१·३८५६४	४·४८१७८
१·९३	३·७२४९	१·३८९२४	४·३९३१८
१·९४	३·७६३६	१·३९२८४	४·४०४५४
१·९५	३·८०२५	१·३९६४२	४·४१५८८
१·९६	३·८४१६	१·४००००	४·४२७१९
१·९७	३·८८०९	१·४०३५७	४·४३८४७
१·९८	३·९२०४	१·४०७१२	४·४४९७२
१·९९	३·९६०१	१·४१०६७	४·४६०९४
२·००	४·००००	१·४१४२१	४·४८२१४

'ह'	'ह²'	√ह	√१०ह
२.००	४.००००	१.४१४२१	४.४७२१४
२.०१	४.०४०१	१.४१७७४	४.४८३३०
२.०२	४.०८०४	१.४२१२७	४.४९४४४
२.०३	४.१२०९	१.४२४७८	४.५०५५५
२.०४	४.१६१६	१.४२८२९	४.५१६६४
२.०५	४.२०२५	१.४३१७८	४.५२७६९
२.०६	४.२४३६	१.४३५२७	४.५३८७२
२.०७	४.२८४९	१.४३८७५	४.५४९७३
२.०८	४.३२६४	१.४४२२२	४.५६०७०
२.०९	४.३६८१	१.४४५६८	४.५७१६५
२.१०	४.४१००	१.४४९१४	४.५८२५८
२.११	४.४५२१	१.४५२५८	४.५९३४७
२.१२	४.४९४४	१.४५६०२	४.६०४३५
२.१३	४.५३६९	१.४५९४५	४.६१५१९
२.१४	४.५७९६	१.४६२८७	४.६२६०१
२.१५	४.६२२५	१.४६६२९	४.६३६८१
२.१६	४.६६५६	१.४६९६९	४.६४७५८
२.१७	४.७०८९	१.४७३०९	४.६५८३३
२.१८	४.७५२४	१.४७६४८	४.६६९०५
२.१९	४.७९६१	१.४७९८६	४.६७९७४
२.२०	४.८४००	१.४८३२४	४.६९०४२
'ह'	'ह²'	√ह	√१०ह

'ह'	'$ह^२$'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
२·२१	४·८८४१	१·४८६६१	४·७०१०६
२·२२	४·९२८४	१·४८९९७	४·७११६९
२·२३	४·९७२९	१·४९३३२	४·७२२२९
२·२४	५·०१७६	१·४९६६६	४·७३२८६
२·२५	५·०६२५	१·५००००	४·७४३४२
२·२६	५·१०७६	१·५०३३३	४·७५३९५
२·२७	५·१५२९	१·५०६६५	४·७६४४५
२·२८	५·१९८४	१·५०९९७	४·७७४९३
२·२९	५·२४४१	१·५१३२७	४·७८५३९
२·३०	५·२९००	१·५१६५८	४·७९५८३
'ह'	'$ह^२$'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$

‘ड’	‘ड^{2}’	$\sqrt{\text{ड}}$	$\sqrt{\text{१० ड}}$
२·३१	५·३३६१	१·५१९८७	४·८०६२५
२·३२	५·३८२४	१·५२३१५	४·८१६६४
२·३३	५·४२८९	१·५२६४३	४·८२७०१
२·३४	५·४७५६	१·५२९७१	४·८३७३५
२·३५	५·५२२५	१·५३२९७	४·८४७६८
२·३६	५·५६९६	१·५३६२३	४·८५७९८
२·३७	५·६१६९	१·५३९४८	४·८६८२६
२·३८	५·६६४४	१·५४२७२	४·८७८५२
२·३९	५·७१२१	१·५४५९६	४·८८८७६
२·४०	५·७६००	१·५४९१९	४·८९८९८
२·४१	५·८०८१	१·५५२४२	४·९०९१८
२·४२	५·८५६४	१·५५५६३	४·९१९३५
२·४३	५·९०४९	१·५५८८५	४·९२९५०
२·४४	५·९५३६	१·५६२०५	४·९३९६४
२·४५	६·००२५	१·५६५२५	४·९४९७५
२·४६	६·०५१६	१·५६८४४	४·९५९८४
२·४७	६·१००९	१·५७१६२	४·९६९९१
२·४८	६·१५०४	१·५७४८०	४·९७९९६
२·४९	६·२००१	१·५७७९७	४·९८९९९
२·५०	६·२५००	१·५८११४	५·०००००
‘ड’	‘ड^{2}’	$\sqrt{\text{ड}}$	$\sqrt{\text{१० ड}}$

'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
२·५१	६·३००१	१·५८४३०	५·००९९९
२·५२	६·३५०४	१·५८७४५	५·०१९९६
२·५३	६·४००९	१·५९०६०	५·०२९९१
२·५४	६·४५१६	१·५९३७४	५·०३९८४
२·५५	६·५०२५	१·५९६८७	५·०४९७५
२·५६	६·५५३६	१·६००००	५·०५९६४
२·५७	६·६०४९	१·६०३१२	५·०६९५२
२·५८	६·६५६४	१·६०६२४	५·०७९३७
२·५९	६·७०८१	१·६०९३५	५·०८९२०
२·६०	६·७६००	१·६१२४५	५·०९९०२
२·६१	६·८१२१	१·६१५५५	५·१०८८२
२·६२	६·८६४४	१·६१८६४	५·११८५९
२·६३	६·९१६९	१·६२१७३	५·१२८३५
२·६४	६·९६९६	१·६२४८१	५·१३८०९
२·६५	७·०२२५	१·६२७८८	५·१४७८२
२·६६	७·०७५६	१·६३०९५	५·१५७५२
२·६७	७·१२८९	१·६३४०१	५·१६७२०
२·६८	७·१८२४	१·६३७०७	५·१७६८७
२·६९	७·२३६१	१·६४०१२	५·१८६५२
२·७०	७·२९००	१·६४३१७	५·१९६१५
'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

'ह'	'$ह^2$'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
२·७१	७·३४४१	१·६४६२१	५·२०५७७
२·७२	७·३९८४	१·६४९२४	५·२१५३६
२·७३	७·४५२९	१·६५२२७	५·२२४९४
२·७४	७·५०७६	१·६५५२९	५·२३४५०
२·७५	७·५६२५	१·६५८३१	५·२४४०४
२·७६	७·६१७६	१·६६१३२	५·२५३५७
२·७७	७·६७२९	१·६६४३३	५·२६३०८
२·७८	७·७२८४	१·६६७३३	५·२७२५७
२·७९	७·७८४१	१·६७०३३	५·२८२०५
२·८०	७·८४००	१·६७३३२	५·२९१५०
२·८१	७·८९६१	१·६७६३१	५·३००९४
२·८२	७·९५२४	१·६७९२९	५·३१०३७
२·८३	८·००८९	१·६८२२६	५·३१९७७
२·८४	८·०६५६	१·६८५२३	५·३२९१७
२·८५	८·१२२५	१·६८८१९	५·३३८५४
२·८६	८·१७९६	१·६९११५	५·३४७९०
२·८७	८·२३६९	१·६९४११	५·३५७२४
२·८८	८·२९४४	१·६९७०६	५·३६६५६
२·८९	८·३५२१	१·७००००	५·३७५८७
२·९०	८·४१००	१·७०२९४	५·३८५१६
'ह'	'$ह^2$'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
२·९१	८·४६८१	१·७०५८७	५·३९४४४
२·९२	८·५२६४	१·७०८८०	५·४०३७०
२·९३	८·५८४९	१·७११७२	५·४१२९५
२·९४	८·६४३६	१·७१४६४	५·४२२१८
२·९५	८·७०२५	१·७१७५६	५·४३१३९
२·९६	८·७६१६	१·७२०४७	५·४४०५९
२·९७	८·८२०९	१·७२३३७	५·४४९७७
२·९८	८·८८०४	१·७२६२७	५·४५८९४
२·९९	८·९४०१	१·७२९१६	५·४६८०९
३·००	९·००००	१·७३२०५	५·४७७२३
३·०१	९·०६०१	१·७३४९४	५·४८६३५
३·०२	९·१२०४	१·७३७८१	५·४९५४५
३·०३	९·१८०९	१·७४०६९	५·५०४५४
३·०४	९·२४१६	१·७४३५६	५·५१३६२
३·०५	९·३०२५	१·७४६४२	५·५२२६८
३·०६	९·३६३६	१·७४९२९	५·५३१७३
३·०७	९·४२४९	१·७५२१४	५·५४०७६
३·०८	९·४८६४	१·७५४९९	५·५४९७७
३·०९	९·५४८१	१·७५७८४	५·५५८७८
३·१०	९·६१००	१·७६०६८	५·५६७७६
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
३·११	९·६७२१	१·७६३५२	५·५७६७४
३·१२	९·७३४४	१·७६६३५	५·५८५७०
३·१३	९·७९६९	१·७६९१८	५·५९४६४
३·१४	९·८५९६	१·७७२००	५·६०३५७
३·१५	९·९२२५	१·७७४८२	५·६१२४९
३·१६	९·९८५६	१·७७७६४	५·६२१३९
३·१७	१०·०४८९	१·७८०४५	५·६३०२८
३·१८	१०·११२४	१·७८३२६	५·६३९१५
३·१९	१०·१७६१	१·७८६०६	५·६४८०१
३·२०	१०·२४००	१·७८८८५	५·६५६८५
३·२१	१०·३०४१	१·७९१६५	५·६६५६९
३·२२	१०·३६८४	१·७९४४४	५·६७४५०
३·२३	१०·४३२९	१·७९७२२	५·६८३३१
३·२४	१०·४९७६	१·८००००	५·६९२१०
३·२५	१०·५६२५	१·८०२७८	५·७००८८
३·२६	१०·६२७६	१·८०५५५	५·७०९६४
३·२७	१०·६९२९	१·८०८३१	५·७१८३९
३·२८	१०·७५८४	१·८११०८	५·७२७१३
३·२९	१०·८२४१	१·८१३८४	५·७३५८५
३·३०	१०·८९००	१·८१६५९	५·७४४५६
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

‘ह’	‘ह²’	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
३·३१	१०·९५६१	१·८१९३४	५·७५३२६
३·३२	११·०२२४	१·८२२०९	५·७६१९४
३·३३	११·०८८९	१·८२४८३	५·७७०६२
३·३४	११·१५५६	१·८२७५७	५·७७९२७
३·३५	११·२२२५	१·८३०३०	५·७८७९२
३·३६	११·२८९६	१·८३३०३	५·७९६५५
३·३७	११·३५६९	१·८३५७६	५·८०५१७
३·३८	११·४२४४	१·८३८४८	५·८१३७८
३·३९	११·४९२१	१·८४१२०	५·८२२३७
३·४०	११·५६००	१·८४३९१	५·८३०९५
३·४१	११·६२८१	१·८४६६२	५·८३९५२
३·४२	११·६९६४	१·८४९३२	५·८४८०८
३·४३	११·७६४९	१·८५२०३	५·८५६६२
३·४४	११·८३३६	१·८५४७२	५·८६५१५
३·४५	११·९०२५	१·८५७४२	५·८७३६७
३·४६	११·९७१६	१·८६०११	५·८८२१८
३·४७	१२·०४०९	१·८६२७९	५·८९०६७
३·४८	१२·११०४	१·८६५४८	५·८९९१५
३·४९	१२·१८०१	१·८६८१५	५·९०७६२
३·५०	१२·२५००	१·८७०८३	५·९१६०८
‘ह’	‘ह²’	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

' ह '	' ह^{२} '	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
३·५१	१२·३२०१	१·८७३५०	५·९२४५३
३·५२	१२·३९०४	१·८७६१७	५·९३२९६
३·५३	१२·४६०९	१·८७८८३	५·९४१३८
३·५४	१२·५३१६	१·८८१४९	५·९४९७९
३·५५	१२·६०२५	१·८८४१४	५·९५८१९
३·५६	१२·६७३६	१·८८६८०	५·९६६५७
३·५७	१२·७४४९	१·८८९४४	५·९७४९५
३·५८	१२·८१६४	१·८९२०९	५·९८३३१
३·५९	१२·८८८१	१·८९४७३	५·९९१६६
३·६०	१२·९६००	१·८९७३७	६·०००००
३·६१	१३·०३२१	१·९००००	६·००८३३
३·६२	१३·१०४४	१·९०२६३	६·०१६६४
३·६३	१३·१७६९	१·९०५२६	६·०२४९५
३·६४	१३·२४९६	१·९०७८८	६·०३३२४
३·६५	१३·३२२५	१·९१०५०	६·०४१५२
३·६६	१३·३९५६	१·९१३११	६·०४९७९
३·६७	१३·४६८९	१·९१५७२	६·०५८०५
३·६८	१३·५४२४	१·९१८३३	६·०६६३०
३·६९	१३·६१६१	१·९२०९४	६·०७४५४
३·७०	१३·६९००	१·९२३५४	६·०८२७६
' ह '	' ह^{२} '	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
३·७१	१३·७६४१	१·९२६१४	६·०९०९८
३·७२	१३·८३८४	१·९२८७३	६·०९९१८
३·७३	१३·९१२९	१·९३१३२	६·१०७३७
३·७४	१३·९८७६	१·९३३९१	६·११५५५
३·७५	१४·०६२५	१·९३६४९	६·१२३७२
३·७६	१४·१३७६	१·९३९०७	६·१३१८८
३·७७	१४·२१२९	१·९४१६५	६·१४००३
३·७८	१४·२८८४	१·९४४२२	६·१४८१७
३·७९	१४·३६४१	१·९४६७९	६·१५६३०
३·८०	१४·४४००	१·९४९३६	६·१६४४१
३·८१	१४·५१६१	१·९५१९२	६·१७२५२
३·८२	१४·५९२४	१·९५४४८	६·१८०६१
३·८३	१४·६६८९	१·९५७०४	६·१८८७०
३·८४	१४·७४५६	१·९५९५९	६·१९६७७
३·८५	१४·८२२५	१·९६२१४	६·२०४८४
३·८६	१४·८९९६	१·९६४६९	६·२१२८९
३·८७	१४·९७६९	१·९६७२३	६·२२०९३
३·८८	१५·०५४४	१·९६९७७	६·२२८९६
३·८९	१५·१३२१	१·९७२३१	६·२३६९९
३·९०	१५·२१००	१·९७४८४	६·२४५००
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
३·९१	१५·२८८१	१·९७७३७	६·२५३००
३·९२	१५·३६६४	१·९७९९०	६·२६०९९
३·९३	१५·४४४९	१·९८२४२	६·२६८९७
३·९४	१५·५२३६	१·९८४९४	६·२७६९४
३·९५	१५·६०२५	१·९८७४६	६·२८४९०
३·९६	१५·६८१६	१·९८९९७	६·२९२८५
३·९७	१५·७६०९	१·९९२४९	६·३००७९
३·९८	१५·८४०४	१·९९४९९	६·३०४७२
३·९९	१५·९२०१	१·९९७५०	६·३१६६४
४·००	१६·००००	२·०००००	६·३२४५६
४·०१	१६·०८०१	२·००२५०	६·३३२४६
४·०२	१६·१६०४	२·००४९९	६·३४०३५
४·०३	१६·२४०९	२·००७४९	६·३४८२३
४·०४	१६·३२१६	२·००९९८	६·३५६१०
४·०५	१६·४०२५	२·०१२४६	६·३६३९६
४·०६	१६·४८३६	२·०१४९४	६·३७१८१
४·०७	१६·५६४९	२·०१७४२	६·३७९६६
४·०८	१६·६४६४	२·०१९९०	६·३८७४९
४·०९	१६·७२८१	२·०२२३७	६·३९५३९
४·१०	१६·८१००	२·०२४८५	६·४०३१२
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ड'	'ड²'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
४.११	१६.८९२१	२.०२७३१	६.४१०९३
४.१२	१६.९७४४	२.०२९७८	६.४१८७२
४.१३	१७.०५६९	२.०३२२४	६.४२६५१
४.१४	१७.१३९६	२.०३४७०	६.४३४२८
४.१५	१७.२२२५	२.०३७१५	६.४४२०५
४.१६	१७.३०५६	२.०३९६१	६.४४९८१
४.१७	१७.३८८९	२.०४२०६	६.४५७५५
४.१८	१७.४७२४	२.०४४५०	६.४६५२९
४.१९	१७.५५६१	२.०४६९५	६.४७३०२
४.२०	१७.६४००	२.०४९३९	६.४८०७४
४.२१	१७.७२४१	२.०५१८३	६.४८८४५
४.२२	१७.८०८४	२.०५४२६	६.४९६१५
४.२३	१७.८९२९	२.०५६७०	६.५०३८४
४.२४	१७.९७७६	२.०५९१३	६.५११५३
४.२५	१८.०६२५	२.०६१५५	६.५१९२०
४.२६	१८.१४७६	२.०६३९८	६.५२६८७
४.२७	१८.२३२९	२.०६६४०	६.५३४५२
४.२८	१८.३१८४	२.०६८८२	६.५४२१७
४.२९	१८.४०४१	२.०७१२३	६.५४९८१
४.३०	१८.४९००	२.०७३६४	६.५५७४४
'ड'	'ड²'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

'ह'	'ह'	$\sqrt{\text{ह}}$	$\sqrt{\text{१०ह}}$
४·३१	१८·५७६१	२·०७६०५	६·५६५०६
४·३२	१८·६६२४	२·०७८४६	६·५७२६७
४·३३	१८·७४८९	२·०८०८७	६·५८०२७
४·३४	१८·८३५६	२·०८३२७	६·५८७८७
४·३५	१८·९२२५	२·०८५६७	६·५९५४५
४·३६	१९·००९६	२·०८८०६	६·६०३०३
४·३७	१९·०९६९	२·०९०४५	६·६१०६०
४·३८	१९·१८४४	२·०९२८४	६·६१८१६
४·३९	१९·२७२१	२·०९५२३	६·६२५७१
४·४०	१९·३६००	२·०९७६२	६·६३३२५
४·४१	१९·४४८१	२·१००००	६·६४०७८
४·४२	१९·५३६४	२·१०२३८	६·६४८३१
४·४३	१९·६२४९	२·१०४७६	६·६५५८२
४·४४	१९·७१३६	२·१०७१३	६·६६३३३
४·४५	१९·८०२५	२·१०९५०	६·६७०८३
४·४६	१९·८९१६	२·१११८७	६·६७८३२
४·४७	१९·९८०९	२·११४२४	६·६८५८१
४·४८	२०·०७०४	२·११६६०	६·६९३२८
४·४९	२०·१६०१	२·११८९६	६·७००७५
४·५०	२०·२५००	२·१२१३२	६·७०८२०
'ह'	'ह^2'	$\sqrt{\text{ह}}$	$\sqrt{\text{१०ह}}$

'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
४·५१	२०·३४०१	२·१२३६८	६·७१५६५
४·५२	२०·४३०४	२·१२६०३	६·७२३०९
४·५३	२०·५२०९	२·१२८३८	६·७३०५३
४·५४	२०·६११६	२·१३०७३	६·७३७९५
४·५५	२०·७०२५	२·१३३०७	६·७४५३७
४·५६	२०·७९३६	२·१३५४२	६·७५२७८
४·५७	२०·८८४९	२·१३७७६	६·७६०१८
४·५८	२०·९७६४	२·१४००९	६·७६७५७
४·५९	२१·०६८१	२·१४२४३	६·७७४९५
४·६०	२१·१६००	२·१४४७६	६·७८२३३
४·६१	२१·२५२१	२·१४७०९	६·७८९७०
४·६२	२१·३४४४	२·१४९४२	६·७९७०६
४·६३	२१·४३६९	२·१५१७४	६·८०४४१
४·६४	२१·५२९६	२·१५४०७	६·८११७५
४·६५	२१·६२२५	२·१५६३९	६·८१९०९
४·६६	२१·७१५६	२·१५८७०	६·८२६४२
४·६७	२१·८०८९	२·१६१०३	६·८३३७४
४·६८	२१·९०२४	२·१६३३३	६·८४१०५
४·६९	२१·९९६१	२·१६५६४	६·८४८३६
४·७०	२२·०९००	२·१६७९५	६·८५५६५
'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
४·७१	२२·१८४१	२·१७०२५	६·८६२९४
४·७२	२२·२७८४	२·१७२५६	६·८७०२३
४·७३	२२·३७२९	२·१७४८६	६·८७७५०
४·७४	२२·४६७६	२·१७७१५	६·८८४७७
४·७५	२२·५६२५	२·१७९४५	६·८९२०२
४·७६	२२·६५७६	२·१८१७४	६·८९९२८
४·७७	२२·७५२९	२·१८४०३	६·९०६५२
४·७८	२२·८४८४	२·१८६३२	६·९१३७५
४·७९	२२·९४४१	२·१८८६१	६·९२०९८
४·८०	२३·०४००	२·१९०८९	६·९२८२०
४·८१	२३·१३६१	२·१९३१७	६·९३५४२
४·८२	२३·२३२४	२·१९५४५	६·९४२६२
४·८३	२३·३२८९	२·१९७७३	६·९४९८२
४·८४	२३·४२५६	२·२००००	६·९५७०१
४·८५	२३·५२२५	२·२०२२७	६·९६४१९
४·८६	२३·६१९६	२·२०४५४	६·९७१३७
४·८७	२३·७१६९	२·२०६८१	६·९७८५४
४·८८	२३·८१४४	२·२०९०७	६·९८५७०
४·८९	२३·९१२१	२·२११३३	६·९९२८५
४·९०	२४·०१००	२·२१३५९	७·०००००
'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ड'	'ड२'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
४·९१	२४·१०८१	२·२१५८५	७·००७१४
४·९२	२४·२०६४	२·२१८११	७·०१४२७
४·९३	२४·३०४९	२·२२०३६	७·०२१४०
४·९४	२४·४०३६	२·२२२६१	७·०२८५१
४·९५	२४·५०२५	२·२२४८६	७·०३५६२
४·९६	२४·६०१६	२·२२७११	७·०४२७३
४·९७	२४·७००९	२·२२९३५	७·०४९८२
४·९८	२४·८००४	२·२३१५९	७·०५६९१
४·९९	२४·९००१	२·२३३८३	७·०६३९९
५·००	२५·००००	२·२३६०७	७·०७१०७
५·०१	२५·१००१	२·२३८३०	७·०७८१४
५·०२	२५·२००४	२·२४०५४	७·०८५२०
५·०३	२५·३००९	२·२४२७७	७·०९२२५
५·०४	२५·४०१६	२·२४४९९	७·०९९३०
५·०५	२५·५०२५	२·२४७२२	७·१०६३४
५·०६	२५·६०३६	२·२४९४४	७·११३३७
५·०७	२५·७०४९	२·२५१६७	७·१२०३९
५·०८	२५·८०६४	२·२५३८९	७·१२७४१
५·०९	२५·९०८१	२·२५६१०	७·१३४४२
५·१०	२६·०१००	२·२५८३२	७·१४१४३
'ड'	'ड२'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
५·११	२६·११२१	२·२६०५३	७·१४८४३
५·१२	२६·२१४४	२·२६२७४	७·१५५४२
५·१३	२६·३१६९	२·२६४९५	७·१६२४०
५·१४	२६·४१९६	२·२६७१६	७·१६९३८
५·१५	२६·५२२५	२·२६९३६	७·१७६३५
५·१६	२६·६२५६	२·२७१५६	७·१८३३१
५·१७	२६·७२८९	२·२७३७६	७·१९०२७
५·१८	२६·८३२४	२·२७५९६	७·१९७२२
५·१९	२६·९३६१	२·२७८१६	७·२०४१७
५·२०	२७·०४००	२·२८०३५	७·२१११०
५·२१	२७·१४४१	२·२८२५४	७·२१८०३
५·२२	२७·२४८४	२·२८४७३	७·२२४९६
५·२३	२७·३५२९	२·२८६९२	७·२३१८७
५·२४	२७·४५७६	२·२८९१०	७·२३८७८
५·२५	२७·५६२५	२·२९१२९	७·२४५६९
५·२६	२७·६६७६	२·२९३४७	७·२५२५९
५·२७	२७·७७२९	२·२९५६५	७·२५९४८
५·२८	२७·८७८४	२·२९७८३	७·२६६३६
५·२९	२७·९८४१	२·३००००	७·२७३२४
५·३०	२८·०९००	२·३०२१७	७·२८०११
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

‘ह’	‘$ह^2$’	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
५·३१	२८·१९६१	२·३०४३४	७·२८६९७
५·३२	२८·३०२४	२·३०६५१	७·२९३८३
५·३३	२८·४०८९	२·३०८६८	७·३००६८
५·३४	२८·५१५६	२·३१०८४	७·३०७५३
५·३५	२८·६२२५	२·३१३०१	७·३१४३७
५·३६	२८·७२९६	२·३१५१७	७·३२१२०
५·३७	२८·८३६९	२·३१७३३	७·३२८०३
५·३८	२८·९४४४	२·३१९४८	७·३३४८५
५·३९	२९·०५२१	२·३२१६४	७·३४१६६
५·४०	२९·१६००	२·३२३७९	७·३४८४७
५·४१	२९·२६८१	२·३२५९४	७·३५५२७
५·४२	२९·३७६४	२·३२८०९	७·३६२०६
५·४३	२९·४८४९	२·३३०२४	७·३६८८५
५·४४	२९·५९३६	२·३३२३८	७·३७५६४
५·४५	२९·७०२५	२·३३४५२	७·३८२४१
५·४६	२९·८११६	२·३३६६६	७·३८९१८
५·४७	२९·९२०९	२·३३८८०	७·३९५९४
५·४८	३०·०३०४	२·३४०९४	७·४०२७०
५·४९	३०·१४०१	२·३४३०७	७·४०९४५
५·५०	३०·२५००	२·३४५२१	७·४१६२०
‘ह’	‘$ह^2$’	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
५.५१	३०.३६०१	२.३४७३४	७.४२२९४
५.५२	३०.४७०४	२.३४९४७	७.४२९६७
५.५३	३०.५८०९	२.३५१६०	७.४३६४०
५.५४	३०.६९१६	२.३५३७२	७.४४३१२
५.५५	३०.८०२५	२.३५५८४	७.४४९८३
५.५६	३०.९१३६	२.३५७९७	७.४५६५४
५.५७	३१.०२४९	२.३६००८	७.४६३२४
५.५८	३१.१३६४	२.३६२९०	७.४६९९४
५.५९	३१.२४८१	२.३६४३२	७.४७६६३
५.६०	३१.३६००	२.३६६४३	७.४८३३१
५.६१	३१.४७२१	२.३६८५४	७.४८९९९
५.६२	३१.५८४४	२.३७०६५	७.४९६६७
५.६३	३१.६९६९	२.३७२७६	७.५०३३३
५.६४	३१.८०९६	२.३७४८७	७.५०९९९
५.६५	३१.९२२५	२.३७६९७	७.५१६६५
५.६६	३२.०३५६	२.३७९०८	७.५२३३०
५.६७	३२.१४८९	२.३८११८	७.५२९९४
५.६८	३२.२६२४	२.३८३२८	७.५३६५८
५.६९	३२.३७६१	२.३८५३७	७.५४३२१
५.७०	३२.४९००	२.३८७४८	७.५४९८३
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$

‘ड’	‘ड²’	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
५.७१	३२.६०४१	२.३८९५६	७.५५६४५
५.७२	३२.७१८४	२.३९१६५	७.५६३०७
५.७३	३२.८३२९	२.३९३७४	७.५६९६८
५.७४	३२.९४७६	२.३९५८३	७.५७६२८
५.७५	३३.०६२५	२.३९७९२	७.५८२८८
५.७६	३३.१७७६	२.४००००	७.५८९४७
५.७७	३३.२९२९	२.४०२०८	७.५९६०५
५.७८	३३.४०८४	२.४०४१६	७.६०२६३
५.७९	३३.५२४१	२.४०६२४	७.६०९२०
५.८०	३३.६४००	२.४०८३२	७.६१५७७
५.८१	३३.७५६१	२.४१०३९	७.६२२३४
५.८२	३३.८७२४	२.४१२४७	७.६२८८९
५.८३	३३.९८८९	२.४१४५४	७.६३५४४
५.८४	३४.१०५६	२.४१६६१	७.६४१९९
५.८५	३४.२२२५	२.४१८६८	७.६४८५३
५.८६	३४.३३९६	२.४२०७४	७.६५५०६
५.८७	३४.४५६९	२.४२२८१	७.६६१५९
५.८८	३४.५७४४	२.४२४८७	७.६६८१२
५.८९	३४.६९२१	२.४२६९३	७.६७४६३
५.९०	३४.८१००	२.४२८९९	७.६८११५

‘ड’ ‘ड²’ $\sqrt{ड}$ $\sqrt{१० ड}$

'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
५·९१	३४·९२८१	२·४३१०५	७·६८७६५
५·९२	३४·०४६४	२·४३३११	७·६९४१५
५·९३	३५·१६४९	२·४३५१६	७·७००६५
५·९४	३५·२८३६	२·४३७२१	७·७०७१४
५·९५	३५·४०२५	२·४३९२६	७·७१३६२
५·९६	३५·५२१६	२·४४१३१	७·७२०१०
५·९७	३५·६४०९	२·४४३३६	७·७२६५८
५·९८	३५·७६०४	२·४४५४०	७·७३३०५
५·९९	३५·८८०१	२·४४७४५	७·७३९५१
६·००	३६·००००	२·४४९४९	७·७४५९७
६·०१	३६·१२०१	२·४५१५३	७·७५२४२
६·०२	३६·२४०४	२·४५३५७	७·७५८८७
६·०३	३६·३६०९	२·४५५६१	७·७६५३१
६·०४	३६·४८१६	२·४५७६४	७·७७१७४
६·०५	३६·६०२५	२·४५९६७	७·७७८१७
६·०६	३६·७२३६	२·४६१७१	७·७८४६०
६·०७	३६·८४४९	२·४६३७४	७·७९१०२
६·०८	३६·९६६४	२·४६५७७	७·७९७४४
६·०९	३७·०८८१	२·४६७७९	७·८०३८५
६·१०	३७·२१००	२·४६९८२	७·८१०२५

| 'ह' | 'ह^{२}' | $\sqrt{ह}$ | $\sqrt{१०ह}$ |

'ह'	'ह²'	√ह	√१० ह
६.११	३७.३३२१	२.४७१८४	७.८१६६५
६.१२	३७.४५४४	२.४७३८६	७.८२३०४
६.१३	३७.५७६९	२.४७५८८	७.८२९४३
६.१४	३७.६९९६	२.४७७९०	७.८३५८२
६.१५	३७.८२२५	२.४७९९२	७.८४२१९
६.१६	३७.९४५६	२.४८१९३	७.८४८५७
६.१७	३८.०६८९	२.४८३९५	७.८५४९३
६.१८	३८.१९२४	२.४८५९६	७.८६१३०
६.१९	३८.३१६१	२.४८७९७	७.८६७६६
६.२०	३८.४४००	२.४८९९८	७.८७४०१
६.२१	३८.५६४१	२.४९१९९	७.८८०३६
६.२२	३८.६८८४	२.४९३९९	७.८८६७०
६.२३	३८.८१२९	२.४९६००	७.८९३०३
६.२४	३८.९३७६	२.४९८००	७.८९९३७
६.२५	३९.०६२५	२.५००००	७.९०५६९
६.२६	३९.१८७६	२.५०२००	७.९१२०२
६.२७	३९.३१२९	५.५०४००	७.९१८३३
६.२८	३९.४३८४	५.५०५९९	७.९२४६५
६.२९	३९.५६४१	५.५०७९९	७.९३०९५
६.३०	३९.६९००	५.५०९९८	७.९३७२५
'ह'	'ह²'	√ह	√१० ह

'ड'	'ड²'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
६·३१	३९·८१२१	२·५११९७	७·९४३५५
६·३२	३९·९४२४	२·५१३९६	७·९४९८४
६·३३	४०·०६८९	२·५१५९५	७·९५६१३
६·३४	४०·१९५६	२·५१७९४	७·९६२४१
६·३५	४०·३२२५	२·५१९९२	७·९६८६९
६·३६	४०·४४९६	२·५२१९०	७·९७४९६
६·३७	४०·५७६९	२·५२३८९	७·९८१२३
६·३८	४०·७०४४	२·५२५८७	७·९८७४९
६·३९	४०·८३२१	२·५२७८४	७·९९३७५
६·४०	४०·९६००	२·५२९८२	८·०००००
६·४१	४१·०८८१	२·५३१८०	८·००६२५
६·४२	४१·२१६४	२·५३३७७	८·०१२४९
६·४३	४१·३४४९	२·५३५७४	८·०१८७३
६·४४	४१·४७३६	२·५३७७२	८·०२४९६
६·४५	४१·६०२५	२·५३९६९	८·०३११९
६·४६	४१·७३१६	२·५४१६५	८·०३७४१
६·४७	४१·८६०९	२·५४३६२	८·०४३६३
६·४८	४१·९९०४	२·५४५५८	८·०४९८४
६·४९	४२·१२०१	२·५४७५५	८·०५६०५
६·५०	४२·२५००	२·५४९५१	८·०६२२६
'ड'	'ड²'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
६.५१	४२.३८०१	२.५५१४७	८.०६८४६
६.५२	४२.५१०४	२.५५३४३	८.०७४६५
६.५३	४२.६४०९	२.५५५३९	८.०८०८४
६.५४	४२.७७१६	२.५५७३४	८.०८७०३
६.५५	४२.९०२५	२.५५९३०	८.०९३२१
६.५६	४३.०३३६	२.५६१२५	८.०९९३८
६.५७	४३.१६४९	२.५६३२०	८.१०५५५
६.५८	४३.२९६४	२.५६५१५	८.१११७२
६.५९	४३.४२८१	२.५६७१०	८.११७८८
६.६०	४३.५६००	२.५६९०५	८.१२४०४
६.६१	४३.६९२१	२.५७०९९	८.१३०१९
६.६२	४३.८२४४	२.५७२९४	८.१३६३४
६.६३	४३.९५६९	२.५७४८८	८.१४२४८
६.६४	४४.०८९६	२.५७६८२	८.१४८६२
६.६५	४४.२२२५	२.५७८७६	८.१५४७५
६.६६	४४.३५५६	२.५८०७०	८.१६०८८
६.६७	४४.४८८९	२.५८२६३	८.१६७०१
६.६८	४४.६२२४	२.५८४५७	८.१७३१३
६.६९	४४.७५६१	२.५८६५०	८.१७९२४
६.७०	४४.८९००	२.५८८४४	८.१८५३५

'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१०ड}$

'ड'	'ड²'	ड √‾	√१० ड
६·७१	४५·०२४१	२·५९०३७	८·१९१४६
६·७२	४५·१५८४	२·५९२३०	८·१९७५६
६·७३	४५·२९२९	२·५९४२२	८·२०३६६
६·७४	४५·४२७६	२·५९६१५	८·२०९७५
६·७५	४५·५६२५	२·५९८०८	८·२१५८४
६·७६	४५·६९७६	२·६००००	८·२२१९२
६·७७	४५·८३२९	२·६०१९२	८·२२८००
६·७८	४५·९६८४	२·६०३८४	८·२३४०८
६·७९	४६·१०४१	२·६०५७६	८·२४०१५
६·८०	४६·२४००	२·६०७६८	८·२४६२१
६·८१	४६·३७६१	२·६०९६०	८·२५२२७
६·८२	४६·५१२४	२·६११५१	८·२५८३३
६·८३	४६·६४८९	२·६१३४३	८·२६४३८
६·८४	४६·७८५६	२·६१५३४	८·२७०४३
६·८५	४६·९२२५	२·६१७२५	८·२७६४७
६·८६	४७·०५९६	२·६१९१६	८·२८२५१
६·८७	४७·१९६९	२·६२१०७	८·२८८५५
६·८८	४७·३३४४	२·६२२९८	८·२९४५८
६·८९	४७·४७२१	२·६२४८८	८·३००६०
६·९०	४७·६१००	२·६२६७९	८·३०६६२
'ड'	'ड'²	√ड	√१० ड

'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
६·९१	४७·७४८१	२·६२८६९	८·३१२६४
६·९२	४७·८८६४	२·६३०५९	८·३१८६५
६·९३	४८·०२४९	२·६३२४९	८·३२४६६
६·९४	४८·१६३६	२·६३४३९	८·३३०६७
६·९५	४८·३०२५	२·६३६२९	८·३३६६७
६·९६	४८·४४१६	२·६३८१८	८·३४२६६
६·९७	४८·५८०९	२·६४००८	८·३४८६५
६·९८	४८·७२०४	२·६४१९७	८·३५४६४
६·९९	४८·८६०१	२·६४३८६	८·३६०६२
७·००	४९·००००	२·६४५७५	८·३६६६०
७·०१	४९·१४०१	२·६४७६४	८·३७२५७
७·०२	४९·२८०४	२·६४९५३	८·३७८५४
७·०३	४९·४२०९	२·६५१४१	८·३८४५१
७·०४	४९·५६१६	२·६५३३०	८·३९०४७
७·०५	४९·७०२५	२·६५५१८	८·३९६४३
७·०६	४९·८४३६	२·६५७०७	८·४०२३८
७·०७	४९·९८४९	२·६५८९५	८·४०८३३
७·०८	५०·१२६४	२·६६०८३	८·४१४२७
७·०९	५०·२६८१	२·६६२७१	८·४२०२१
७·१०	५०·४१००	२·६६४५८	८·४२६१५
'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$

'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
७·११	५०·५५२१	२·६६६४६	८·४३२०८
७·१२	५०·६९४४	२·६६८३३	८·४३८०१
७·१३	५०·८३६९	२·६७०२१	८·४४३९३
७·१४	५०·९७९६	२·६७२०८	८·४४९८५
७·१५	५१·१२२५	२·६७३९५	८·४५५७७
७·१६	५१·२६५६	२·६७५८२	८·४६१६८
७·१७	५१·४०८९	२·६७७६९	८·४६७५९
७·१८	५१·५५२४	२·६७९५५	८·४६३४९
७·१९	५१·६९६१	२·६८१४२	८·४७९३९
७·२०	५१·८४००	२·६८३२८	८·४८५२८
७·२१	५१·९८४१	२·६८५१४	८·४९११७
७·२२	५२·१२८४	२·६८७०१	८·४९७०६
७·२३	५२·२७२९	२·६८८८७	८·५०२९४
७·२४	५२·४१७६	२·६९०७२	८·५०८८२
७·२५	५२·५६२५	२·६९२५८	८·५१४६९
७·२६	५२·७०७६	२·६९४४४	८·५२०५६
७·२७	५२·८५२९	२·६९६२९	८·५२६४३
७·२८	५२·९९८४	२·६९८१५	८·५३२२९
७·२९	५३·१४४१	२·७००००	८·५३८१५
७·३०	५३·२९००	२·७०१८५	८·५४४००
'ड'	'ड^{२}'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

‘ड’	‘ड²’	$\sqrt{\text{ड}}$	$\sqrt{\text{१०ड}}$
७·३१	५३·४३६१	२·७०३७०	८·५४९८५
७·३२	५३·५८२४	२·७०५५५	८·५५५७०
७·३३	५३·७२८९	२·७०७४०	८·५६१५४
७·३४	५३·८७५६	२·७०९२४	८·५६७३८
७·३५	५४·०२२५	२·७११०९	८·५७३२१
७·३६	५४·१६९६	२·७१२९३	८·५७९०४
७·३७	५४·३१६९	२·७१४७७	८·५८४८७
७·३८	५४·४६४४	२·७१६६२	८·५९०६९
७·३९	५४·६१२१	२·७१८४६	८·५९६५१
७·४०	५४·७६००	२·७२०२९	८·६०२३३
७·४१	५४·९०८१	२·७२२१३	८·६०८१४
७·४२	५५·०५६४	२·७२३९७	८·६१३९४
७·४३	५५·२०४९	२·७२५८०	८·६१९७४
७·४४	५५·३५३६	२·७२७६४	८·६२५५४
७·४५	५५·५०२५	२·७२९४७	८·६३१३४
७·४६	५५·६५१६	२·७३१३०	८·६३७१३
७·४७	५५·८००९	२·७३३१३	८·६४२९२
७·४८	५५·९५०४	२·७३४९६	८·६४८७०
७·४९	५६·१००१	२·७३६७९	८·६५४४८
७·५०	५६·२५००	२·७३८६१	८-६६०२५

| ‘ड’ | ‘ड²’ | $\sqrt{\text{ड}}$ | $\sqrt{\text{१०ड}}$ |

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
७.५१	५६.४००१	२.७४०४४	८.६६६०३
७.५२	५६.५५०४	२.७४२२६	८.६७१७९
७.५३	५६.७००९	२.७४४०८	८.६७७५६
७.५४	५६.८५१६	२.७४५९१	८.६८३३२
७.५५	५७.००२५	२.७४७७३	८.६८९०७
७.५६	५७.१५३६	२.७४९५५	८.६९४८३
७.५७	५७.३०४९	२.७५१३६	८.७००५७
७.५८	५७.४५६४	२.७५३१८	८.७०६३२
७.५९	५७.६०८१	२.७५५००	८.७१२०६
७.६०	५७.७६००	२.७५६८१	८.७१७८०
७.६१	५७.९१२१	२.७५८६२	८.७२३५३
७.६२	५८.०६४४	२.७६०४३	८.७२९२६
७.६३	५८.२१६९	२.७६२२५	८.७३४९९
७.६४	५८.३६९६	२.७६४०५	८.७४०७१
७.६५	५८.५२२५	२.७६५८६	८.७४६४३
७.६६	५८.६७५६	२.७६७६७	८.७५२१४
७.६७	५८.८२८९	२.७६९४८	८.७५७८५
७.६८	५८.९८२४	२.७७१२८	८.७६३५६
७.६९	५९.१३६१	२.७७३०८	८.७६९२६
७.७०	५९.२९००	२.७७४८९	८.७७४९६
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
७·७१	५९·४४४१	२·७७६६९	८·७८०६६
७·७२	५९·५९८४	२·७७८४९	८·७८६३५
७·७३	५९·७५२९	२·७८०२९	८·७९२०४
७·७४	५९·९०७६	२·७८२०९	८·७९७७३
७·७५	६०·०६२५	२·७८३८८	८·८०३४१
७·७६	६०·२१७६	२·७८५६८	८·८०९०९
७·७७	६०·३७२९	२·७८७४८	८·८१४७६
७·७८	६०·५२८४	२·७८९२७	८·८२०४३
७·७९	६०·६८४१	२·७९१०६	८·८२६१०
७·८०	६०·८४००	२·७९२८५	८·८३१७६
७·८१	६०·९९६१	२·७९४६४	८·८३७४२
७·८२	६१·१५२४	२·७९६४३	८·८४३०८
७·८३	६१·३०८९	२·७९८२१	८·८४८७३
७·८४	६१·४६५६	२·८००००	८·८५४३८
७·८५	६१·६२२५	२·८०१७९	८·८६००२
७·८६	६१·७७९६	२·८०३५७	८·८६५६६
७·८७	६१·९३६९	२·८०५३५	८·८७१३०
७·८८	६२·०९४४	२·८०७१३	८·८७६९४
७·८९	६२·२५२१	२·८०८९१	८·८८२५७
७·९०	६२·४१००	२·८१०६९	८·८८८१९
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ह'	'ह^{2}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
७·९१	६२·५६८१	२·८१२४७	८·८९३८२
७·९२	६२·७२६४	२·८१४२५	८·८९९४४
७·९३	६२·८८४९	२·८१६०३	८·९०५०५
७·९४	६३·०४३६	२·८१७८०	८·९१०६७
७·९५	६३·२०२५	२·८१९५७	८·९१६२८
७·९६	६३·३६१६	२·८२१३५	८·९२१८८
७·९७	६३·५२०९	२·८२३१२	८·९२७४९
७·९८	६३·६८०४	२·८२४८९	८·९३३०८
७·९९	६३·८४०१	२·८२६६६	८·९३८६८
८·००	६४·००००	२·८२८४३	८·९४४२७
८·०१	६४·१६०१	२·८३०१९	८·९४९८६
८·०२	६४·३२०४	२·८३१९६	८·९५५४५
८·०३	६४·४८०९	२·८३३७३	८·९६१०३
८·०४	६४·६४१६	२·८३५४९	८·९६६६०
८·०५	६४·८०२५	२·८३७२५	८·९७२१८
८·०६	६४·९६३६	२·८३९०१	८·९७७७५
८·०७	६५·१२४९	२·८४०७७	८·९८३३२
८·०८	६५·२८६४	२·८४२५३	८·९८८८८
८·०९	६५·४४८१	२·८४४२९	८·९९४४४
८·१०	६५·६१००	२·८४६०५	९·०००००

| 'ह' | 'ह^{2}' | $\sqrt{ह}$ | $\sqrt{१०ह}$ |

'ह'	'ह²'	√ह	√१० ह
८·११	६५·७७२१	२·८४७८१	९·००५५५
८·१२	६५·९३४४	२·८४९५६	९·०१११०
८·१३	६६·०९६९	२·८५१३२	९·०१६६५
८·१४	६६·२५९६	२·८५३०७	९·०२२१९
८·१५	६६·४२२५	२·८५४८२	९·०२७७४
८·१६	६६·५८५६	२·८५६५७	९·०३३२७
८·१७	६६·७४८९	२·८५८३२	९·०३८८१
८·१८	६६·९१२४	२·८६००७	९·०४४३४
८·१९	६७·०७६१	२·८६१८२	९·०४९८६
८·२०	६७·२४००	२·८६३५६	९·०५५३९
८·२१	६७·४०४१	२·८६५३१	९·०६०९१
८·२२	६७·५६८४	२·८६७०५	९·०६६४२
८·२३	६७·७३२९	२·८६८८०	९·०७१९३
८·२४	६७·८९७६	२·८७०५४	९·०७७४४
८·२५	६८·०६२५	२·८७२२८	९·०८२९५
८·२६	६८·२२७६	२·८७४०२	९·०८८४५
८·२७	६८·३९२९	२·८७५७६	९·०९३९५
८·२८	६८·५५८४	२·८७७५०	९·०९९४५
८·२९	६८·७२४१	२·८७९२४	९·१०४९४
८·३०	६८·८९००	२·८८०९७	९·११०४३
'ह'	'ह²'	√ह	√१० ह

'ड'	'ड²'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
८·३१	६९·०५६१	२·८८२७१	९·११५९२
८·३२	६९·२२२४	२·८८४४४	९·१२१४०
८·३३	६९·३८८९	२·८८६१७	९·१२६८८
८·३४	६९·५५५६	२·८८७९१	९·१३२३६
८·३५	६९·७२२५	२·८८९६४	९·१३७८३
८·३६	६९·८८९६	२·८९१३७	९·१४३३०
८·३७	७०·०५६९	२·८९३१०	९·१४८७७
८·३८	७०·२२४४	२·८९४८२	०·१५४२३
८·३९	७०·३९२१	२·८९६५५	९·१५९६९
८·४०	७०·५६००	२·८९८२८	९·१६५१५
८·४१	७०·७२८१	२·९००००	९·१७०६१
८·४२	७०·८९६४	२·९०१७२	९·१७६०६
८·४३	७१·०६४९	२·९०३४५	९·१८१५०
८·४४	७१·२३३६	२·९०५१७	९·१८६९५
८·४५	७१·४०२५	२·९०६८९	९·१९२३९
८·४६	७१·५७१६	२·९०८६१	९·१९७८३
८·४७	७१·७४०९	२·९१०३३	९·२०३२६
८·४८	७१·९१०४	२·९१२०४	९·२०८६९
८·४९	७२·०८०१	२·९१३७६	९·२१४१२
८·५०	७२·२५००	२·९१५४८	९·२१९५४
'ड'	'ड²'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$

'ह'	'ह²'	√ह	√१०ह
८·५१	७२·४२०१	२·९१७१९	९·२२४९७
८·५२	७२·५९०४	२·९१८९०	९·२३०३८
८·५३	७२·७६०९	२·९२०६२	९·२३५८०
८·५४	७२·९३१६	२·९२२३३	९·२४१२१
८·५५	७३·१०२५	२·९२४०४	९·२४६६२
८·५६	७३·२७३६	२·९२५७५	९·२५२०३
८·५७	७३·४४४९	२·९२७४६	९·२५७४३
८·५८	७३·६१६४	२·९२९१६	९·२६२८३
८·५९	७३·७८८१	२·९३०८७	९·२६८२३
८·६०	७३·९६००	२·९३२५८	९·२७३६२
८·६१	७४·१३२१	२·९३४२८	९·२७९०१
८·६२	७४·३०४४	२·९३५९८	९·२८४४०
८·६३	७४·४७६९	२·९३७६९	९·२८९७८
८·६४	७४·६४९६	२·९३९३९	९·२९५१६
८·६५	७४·८२२५	२·९४१०९	९·३००५४
८·६६	७४·९९५६	२·९४२७९	९·३०५९१
८·६७	७५·१६८९	२·९४४४९	९·३११२८
८·६८	७५·३४२४	२·९४६१८	९·३१६६५
८·६९	७५·५१६१	२·९४७८८	९·३२२०२
८·७०	७५·६९००	२·९४९५८	९·३२७३८
'ह'	'ह²'	√ह	√१०ह

‘ह’	‘ह^{२}’	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
८·७१	७५·८६४१	२·९५१८७	९·३३२७४
८·७२	७६·०३८४	२·९५२९६	९·३३८०९
८·७३	७६·२१२९	२·९५४६६	९·३४३४५
८·७४	७६·३८७६	२·९५६३५	९·३४८८०
८·७५	७६·५६२५	२·९५८०४	९·३५४१४
८·७६	७६·७३७६	२·९५९७३	९·३५९४९
८·७७	७६·९१२९	२·९६१४२	९·३६४८३
८·७८	७७·०८८४	२·९६३११	९·३७०१७
८·७९	७७·२६४१	२·९६४७९	९·३७५५०
८·८०	७७·४४००	२·९६६४८	९·३८०८३
८·८१	७७·६१६१	२·९६८१६	९·३८६१६
८·८२	७७·७९२४	२·९६९८५	९·३९१४९
८·८३	७७·९६८९	२·९७१५३	९·३९६८१
८·८४	७८·१४५६	२·९७३२१	९·४०२१३
८·८५	७८·३२२५	२·९७४८९	९·४०७४४
८·८६	७८·४९९६	२·९७६५८	९·४१२७६
८·८७	७८·६७६९	२·९७८२५	९·४१८०७
८·८८	७८·८५४४	२·९७९९३	९·४२३३८
८·८९	७९·०३२१	२·९८१६१	९·४२८६८
८·९०	७९·२१००	२·९८३२९	९·४३३९८
‘ह’	‘ह^{२}’	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
८·९१	७९·३८८१	२·९८४९६	९·४३९२८
८·९२	७९·५६६४	२·९८६६४	९·४४४५८
८·९३	७९·७४४९	२·९८८३१	९·४४९८७
८·९४	७९·९२३६	२·९८९९८	९·४५५१६
८·९५	८०·१०२५	२·९९१६६	९·४६०४४
८·९६	८०·२८१६	२·९९३३३	९·४६५७३
८·९७	८०·४६०९	२·९९५००	९·४७१०१
८·९८	८०·६४०४	२·९९६६६	९·४७६२९
८·९९	८०·८२०१	२·९९८३३	९·४८१५६
९·००	८१·००००	३०००००	९·४८६८३
९·०१	८१·१८०१	३·००१६७	९·४९२१०
९·०२	८१·३६०४	३·००३३३	९·४९७३७
९·०३	८१·५४०९	३·००५००	९·५०२६३
९·०४	८१·७२१६	३·००६६६	९·५०७८९
९·०५	८१·९०२५	३·००८३२	९·५१३१५
९·०६	८२·०८३६	३·००९९८	९·५१८४०
९·०७	८२·२६४९	३·०११६४	९·५२३६५
९·०८	८२·४४६४	३·०१३३०	९·५२८९०
९·०९	८२·६२८१	३·०१४९६	९·५३४१५
९·१०	८२·८१००	३·०१६६२	९·५३९३९
'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ड'	'$ड^2$'	$\sqrt{ड}$	$\sqrt{१० ड}$
९·११	८२·९९२१	३·०१८२८	९·५४४६३
९·१२	८३·१७४४	३·०१९९३	९·५४९८७
९·१३	८३·३५६९	३·०२१५९	९·५५५१०
९·१४	८३·५३९६	३·०२३२४	९·५६०३३
९·१५	८३·७२२५	३·०२४९०	९·५६५५६
९·१६	८३·९०५६	३·०२६५५	९·५७०७९
९·१७	८४·०८८९	३·०२८२०	९·५७६०१
९·१८	८४·२७२४	३·०२९८५	९·५८१२३
९·१९	८४·४५६१	३·०३१५०	९·५८६४५
९·२०	८४·६४००	३·०३३१५	९·५९१६६
९·२१	८४·८२४१	३·०३४८०	९·५९६८७
९·२२	८५·००८४	३·०३६४५	९·६०२०८
९·२३	८५·१९२९	३·०३८०९	९·६०७२९
९·२४	८५·३७७६	३·०३९७४	९·६१२४९
९·२५	८५·५६२५	३·०४१३८	९·६१७६९
९·२६	८५·७४७६	३·०४३०२	९·६२२८९
९·२७	८५·९३२९	३·०४४६७	९·६२८०८
९·२८	८६·११८४	३·०४६३१	९·६३३२८
९·२९	८६·३०४१	३·०४७९५	९·६३८४६
९·३०	८६·४९००	३·०४९५९	९·६४३६५

| 'ड' | '$ड^2$' | $\sqrt{ड}$ | $\sqrt{१० ड}$ |

'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$
९.३१	८६.६७६१	३.०५१२३	९.६४८८३
९.३२	८६.८६२४	३.०५२८७	९.६५४०१
९.३३	८७.०४८९	३.०५४५०	९.६५९१९
९.३४	८७.२३५६	३.०५६१४	९.६६४३७
९.३५	८७.४२२५	३.०५७७८	९.६६९५४
९.३६	८७.६०९६	३.०५९४१	९.६७४७१
९.३७	८७.७९६९	३.०६१०५	९.६७९८८
९.३८	८७.९८४४	३.०६२६८	९.६८५०४
९.३९	८८.१७२१	३.०६४३१	९.६९०२०
९.४०	८८.३६००	३.०६५९४	९.६९५३६
९.४१	८८.५४८१	३.०६७५७	९.७००५२
९.४२	८८.७३६४	३.०६९२०	९.७०५६७
९.४३	८८.९२४९	३.०७०८३	९.७१०८२
९.४४	८९.११३६	३.०७२४६	९.७१५९७
९.४५	८९.३०२५	३.०७४०९	९.७२१११
९.४६	८९.४९१६	३.०७५७१	९.७२६२५
९.४७	८९.६८०९	३.०७७३४	९.७३१३९
९.४८	८९.८७०४	३.०७८९६	९.७३६५३
९.४९	९०.०६०१	३.०८०५८	९.७४१६६
९.५०	९०.२५००	३.०८२२१	९.७४६७९
'ह'	'ह^{२}'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१०ह}$

'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
९·५१	९०·४४०१	३·०८३८३	९·७५१९२
९·५२	९०·६३०४	३·०८५४५	९·७५७०५
९·५३	९०·८२०९	३·०८७०७	९·७६२१७
९·५४	९१·०११६	३·०८८६९	९·७६७२९
९·५५	९१·२०२५	३·०९०३१	९·७७२४१
९·५६	९१·३९३६	३·०९१९२	९·७७७५३
९·५७	९१·५८४९	३·०९३५४	९·७८२६४
९·५८	९१·७७६४	३·०९५१६	९·७८७७५
९·५९	९१·९६८१	३·०९६७७	९·७९२८५
९·६०	९२·१६००	३·०९८३९	९·७९७९६
९·६१	९२·३५२१	३·१००००	९·८०३०६
९·६२	९२·५४४४	३·१०१६१	९·८०८१६
९·६३	९२·७३६९	३·१०३२२	९·८१३२६
९·६४	९२·९२९६	३·१०४८३	९·८१८३५
९·६५	९३·१२२५	३·१०६४४	९·८२३४४
९·६६	९३·३१५६	३·१०८०५	९·८२८५३
९·६७	९३·५०८९	३·१०९६६	९·८३३६२
९·६८	९३·७०२४	३·१११२७	९·८३८७०
९·६९	९३·८९६१	३·११२८८	९·८४३७८
९·७०	९४·०९००	३·११४४८	९·८४८८६
'ह'	'ह²'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

'ड'	'ड²'	√ड	√१० ड
९·७१	९४·२८४१	३·११६०९	९·८५३९३
९·७२	९४·४७८४	३·११७६९	९·८५९०१
९·७३	९४·६७२९	३·११९२९	९·८६४०८
९·७४	९४·८६७६	३·१२०९०	९·८६९१४
९·७५	९५·०६२५	३·१२२५०	९·८७४२१
९·७६	९५·२५७६	३·१२४१०	९·८७९२७
९·७७	९५·४५२९	३·१२५७०	९·८८४३३
९·७८	९५·६४८४	३·१२७३०	९·८८९३९
९·७९	९५·८४४१	३·१२८९०	९·८९४४४
९·८०	९६·०४००	३·१३०५०	९·८९९४९
२·८१	९६·२३६१	३·१३२०९	९·९०४५४
९·८२	९६·४३२४	३·१३३६९	९·९०९५९
९·८३	९६·६२८९	३·१३५२८	९·९१४६४
९·८४	९६·८२५६	३·१३६८८	९·९१९६८
९·८५	९७·०२२५	३·१३८४७	९·९२४७१
९·८६	९७·२१९६	३·१४००६	९·९२९७५
९·८७	९७·४१६९	३·१४१६६	९·९३४७९
९·८८	९७·६१४४,	३·१४३२५	९·९३९८२
९·८९	९७·८१२१	३·१४४८४	९·९४४८५
९·९०	९८·०१००	३·१४६४३	९·९४९८७
'ड'	'ड²'	√ड	√१० ड

'ह'	'ह'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$
९·९१	९८·२०८१	३·१४८०२	९·९५४९०
९·९२	९८·४०६४	३·१४९६०	९·९५९९२
९·९३	९८·६०४९	३·१५११९	९·९६४९४
९·९४	९८·८०३६	३·१५२७८	९·९६९९५
९·९५	९९·००२५	३·१५४३६	९·९७४९७
९·९६	९९·२०१६	३·१५५९५	९·९७९९८
९·९७	९९·४००९	३·१५७५३	९·९८४९९
९·९८	९९·६००४	३·१५९११	९·९८९९९
९·९९	९९·८००१	३·१६०७०	९·९९५००
१०·००	१००·०००	३·१६२२८	१०·००००
'ह'	'$ह^२$'	$\sqrt{ह}$	$\sqrt{१० ह}$

परिशिष्ट १ (५) सहसंबध-मापांक

स्वतंत्रतेची मात्रा	'०५	व '०१ स्तरावर सार्थ असे मापांक
१	'९९७	१'०००
२	'९५०	'९९०
३	'८७८	'९५९
४	'८११	'९१७
५	'७५४	'८७४
६	'७०७	'८३४
७	'६६६	'७९८
८	'६३२	'७८५
९	'६०२	'७३५
१०	'५७६	'७०८
११	'५५३	'६८४
१२	'५३२	'६६१
१३	'५१४	'६४१
१४	'४९७	'६२३
१५	'४८२	'६०६
१६	'४६८	'५९०
१७	'४५६	'५७५
१८	'४४४	'५६१
१९	'४३३	'५४९
२०	'४२३	'५३७
२१	'४१३	'५२६
२२	'४०४	'५१५
२३	'३९६	'५०५
२४	'३८८	'४९६
२५	'३८१	'४८७
२६	'३७४	'४७८
२७	'३६७	'४७०
२८	'३६१	'४६३
२९	'३५५	'४५६
३०	'३४९	'४४९
४०	'३०४	'३९३
६०	'२५०	'३२५
१००	'१९५	'२५४
२००	'१३८	'१८१
५००	'०८८	'११५
१०००	'०६२	'०८१

आभार

(१) क्ष^{2} व इतर सारणीकरिता Rothamsted Experimental station वरील संख्यानीय–विभाग प्रमुख F. Yates.

(२) शब्दकोष व संज्ञेकरिता International Academy of Indian Culture चे प्रमुख Dr. Lokeshchandra.

(३) संगणना, चित्रांकण वगैरेकरिता Research D' Associates. पुणें १६.



शुद्धि–पत्रक

	स्थान	अशुद्ध	शुद्ध
प्रकरण १.	पान ११ ओळ २	अहा	अर्हा
प्रकरण २.	पान १८	$\frac{१००}{१०}$	$=\frac{१००}{१०}=$
	पान १९ सारणी ४	म' = २५ ग	म' = २५+ग
प्रकरण ३.	सुरुवातीस	मध्यका	मध्यगा (सदर शब्द "**मध्यका**" म्हणून जेथे जेथे आला आहे, तो **मध्यगा** म्हणून वाचावा.)
प्रकरण ४.	पान ३२ :	म = २७·८५ म. वि. (रि)–	म=२७·८५, म. वि. (री)= (व इतर सर्व ठिकाणी म. वि. करिता दीर्घ '**री**' धरावे.)
	पान ३२ ओळ, २	विजाय	विजिय.
	पान ३५	$\frac{\sqrt{२७५३७·०१७६}}{१५१}$	$\sqrt{\frac{२७५३७·०१७६}{१५१}}$
प्रकरण ६.	पान, ४९	अल्प–तम वर्ग-रीती सरल रेखीय	अल्प–तम वर्गरीती (सरल रेखीय)
	पान ४९, ओळ ३.	त्या रेषेने दर्शित 'थ' व 'र'	त्या रेषेने दर्शित 'य' व 'र'
	पान ५०, ओळ ३.	तेव्हा वरील तऱ्हेने समीकार	तेव्हा वरील तऱ्हेचे समीकार
प्रकरण ७.	पान ५९, सारणी १५, स्तंभ ३	निर्यात (दशलक्ष र–पिंपात)	निर्यात (दश लक्ष पिंपात) र.
	पान ६२, सूत्र ३४	$र=क+ख.\ य+ग.\ य^{2}+घ.\ य^{3}+ \ldots\ldots + ङ.\frac{ङ}{य}$	$र=क+ख·य+ग.य^{2}+घ.\ य^{3} + \ldots\ldots + ङ·\ य^{ङ}$

प्रकरण ९. पान ८९, सूत्र ४१, असे वाचावे $धि_य^२ = \sqrt{\frac{धी_य^२}{डा} - ग_य^२}$

पान ८९, सूत्र ४२ असे वाचावे = $धि_र = \sqrt{\frac{धी_र^२}{डा} - ग_र^२}$

सूचना $\begin{pmatrix} धि = \text{प्रमाप विभ्रम} \\ धी = \text{योग} \end{pmatrix}$

पान ९०, ओळ ९	
परन्तु : र र' – ८२१, = आणि	परन्तु : र' = र – ८२१, आणि
पान ९१ ओळ ३	
डा = ४३५, धी (य') = ५०३	डा = ४२५, धी (य) = ५०३
पान ९१ धी (र') = ४६०९	धी (र) = ४६०९
इतर सहसम्बन्ध–विधी अनुस्थिती सहसम्बन्ध	इतर सहसम्बन्ध–विधी : अनु–स्थिती सहसम्बन्ध.
पान ९१ सूत्र ४६	
$दि = १ - \frac{६ धी - (धा^२)}{डा (डा^२ - १)}$	$दि = १ - \frac{६ धी \cdot (धा^२)}{डा (डा^२ - १)}$
प्रकरण १०. पान १०५, ओळ १९ सारणी ३० मधील न्यासाधारे	सारणी ३१ मधील न्यासाधारे
प्रकरण १२. पान १२३ ओळ ११ शेवटी	$रा० = \frac{डा}{२\cdot५६६२८} \; धि = \frac{६००}{२\cdot१०९ (२\cdot५०६६६२७)}$

$$रा० = \frac{डा}{२\cdot५०६६२८} = \frac{६००}{धि२\cdot१०९ \times २\cdot५०६६२८} =$$

प्रकरण १७. पान १७३ सारणी ४४ स्तंभ ३ (डॉलरमध्ये खास)	डॉलरमध्ये एकक
पान १७३, सारणी ४४ शेवटी	
साताहिक–माध्य किंमती भट्टीवरील ––पादवृत्त चिकागो व बर्मिंगहॅम येथील.	किंमती : साताहिक माध्य चिकागो व बर्मिंगहॅम येथील भट्टीवरील

आधार मूळ : लोहयुग	आधार (मूळ : लोहयुग)
परिशिष्ट : २ सूत्रांचा कोष	
पान २०५, सूत्र १०	
रि =......	री = ...
पान २०५, सूत्र १६ व १७	
ष =	ष_1 =
पान २०५, सूत्र १८	
ष =	ष_2 =
पान २०८, सूत्र ५२	
$\text{दि}_{\text{रय}}$=	$\text{दि}^2(\text{रय})$ =
